MC-Serie 6

1. Gegeben ist das Integral $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A$, wobei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ bezeichnet. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integrationen lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

i) ✓ $I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

ii) ✗ $I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

iii) ✗ $I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\phi} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$

iv) ✗ $I = \int_0^1 \int_y^1 \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Das Gebiet D ist in Abbildung 1 skizziert.

2pt $y = x$ [rb] at 200 200 r [rb] at 200 110 ϕ at 100 40

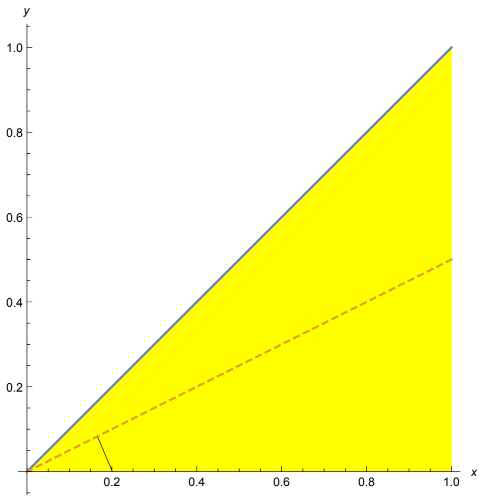

Figure 1: Aufgabe 1

(a) ist sicher falsch, da dort über ein Quadrat integriert wird. (b) und (d) sind korrekte Formeln in kartesischen Koordinaten, währenddessen (c) eine Darstellung in Polarkoordinaten ist. Beachte, dass $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und dass das Flächenelement in Polarkoordinaten durch $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ gegeben ist, sowie dass $x = r\cos\phi$ gilt. Für $x = 1$ erhalten wir somit $r = \frac{1}{\cos\phi}$.

2. Das Integral der Funktion $f(x,y) := \sqrt{4-x^2-y^2}$ über die Menge $B := \{(x,y)\,|\,x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$ ist:

i) ✗ $\iint_B f\,\mathrm{d}A = \frac{2}{3}\pi$

ii) ✓ $\iint_B f\,\mathrm{d}A = \frac{4}{3}\pi$
iii) ✗ $\iint_B f\,\mathrm{d}A = \frac{16}{3}\pi$
iv) ✗ $\iint_B f\,\mathrm{d}A = 8\pi$
v) ✗ $\iint_B f\,\mathrm{d}A = \frac{32}{3}\pi$
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Geometrisch: Die Funktion f ist ≥ 0 auf B, und die Menge der Punkte zwischen ihrem Graphen und der xy-Ebene ist ein Viertel der Halbkugel H mit Zentrum O und Radius 2. Das Integral berechnet daher das Volumen eines Achtels der Vollkugel mit Radius r, dieses beträgt $\frac{4}{3}\pi r^3$. Also gilt

$$\iint_B f\,\mathrm{d}A = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3 = \frac{4}{3}\pi.$$

Mit Doppelintegral: Wir rechnen in Polarkoordinaten, da B ein Viertelkreis ist:

$$\iint_B f\,\mathrm{d}A = \int_0^2\int_0^{\pi/2}\sqrt{4-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^2\sqrt{4-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r.$$

Substitution von $u=\sqrt{4-r^2}$ mit $u\,\mathrm{d}u = -r\,\mathrm{d}r$ liefert

$$\frac{\pi}{2}\int_2^0(-u^2)\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi}{2}\left.\frac{u^3}{3}\right|_2^0 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

3. Welche der folgenden Interpretationen vom Integral $I = \iint_B \mathrm{d}A$ mit $B\subset\mathbb{R}^2$ sind korrekt?

i) ✗ I ist immer gleich 0.
ii) ✓ I ist die Fläche von B.
iii) ✓ I ist das Volumen eines Zylinders der Höhe 1 über B.
iv) ✗ Hat keine geometrische Bedeutung, weil die Funktion $f(x,y)$ fehlt.
v) ✓ I ist die Masse von B mit homogener Dichte 1.
vi) ✗ weiss ich nicht

4. Das Dreifachintegral einer Funktion f über dem Gebiet

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 3x-3,\ 0\leq z\leq 5\right\}$$

kann geschrieben werden als

$$\int_0^{3x-3}\int_0^1\int_0^5 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

i) ✗ wahr

ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Diese Integrationsreihenfolge ist nicht zulässig! Bei der zweiten Integration wird nach x integriert, während die Integrationsschranken in der dritten Integration von x abhängen. Wir müssen also zuerst nach y integrieren, bevor wir nach x integrieren dürfen. Die möglichen Lösungen wären somit

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{3x-3} \int_0^5 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_0^5 \int_0^{3x-3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^5 \int_0^1 \int_0^{3x-3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

5. Das Gebiet

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},\, 0 \le z \le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

ist eine Sphäre.

i) ✗ wahr

ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es kann sich um keine Sphäre handeln, da die z-Komponente nicht von y abhängt. Das kann man aber auch auf andere Arten einsehen. Eine Skizze der Funktion $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$ findet sich in Abbildung 2.

6. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ mit Dichtefunktion $\rho(x,y)$, dann besitzt der Schwerpunkt (x_s, y_s) von B die Koordinaten

i) ✗ $x_s = \iint_B x\rho(x,y)\,\mathrm{d}A, \qquad y_s = \iint_B y\rho(x,y)\,\mathrm{d}A.$

ii) ✗ $x_s = \dfrac{\iint_B y\rho(x,y)\,\mathrm{d}A}{\iint_B \rho(x,y)\,\mathrm{d}A}, \qquad y_s = \dfrac{\iint_B x\rho(x,y)\,\mathrm{d}A}{\iint_B \rho(x,y)\,\mathrm{d}A}.$

iii) ✓ $x_s = \dfrac{\iint_B x\rho(x,y)\,\mathrm{d}A}{\iint_B \rho(x,y)\,\mathrm{d}A}, \qquad y_s = \dfrac{\iint_B y\rho(x,y)\,\mathrm{d}A}{\iint_B \rho(x,y)\,\mathrm{d}A}.$

iv) ✗ $x_s = \dfrac{\iint_B x\,\mathrm{d}A}{\iint_B \mathrm{d}A}, \qquad y_s = \dfrac{\iint_B y\,\mathrm{d}A}{\iint_B \mathrm{d}A}.$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Diese Formeln wurden in der Vorlesung hergeleitet. (iv) ist nur der Spezialfall für homogene Dichte $\rho(x,y) \equiv 1$.

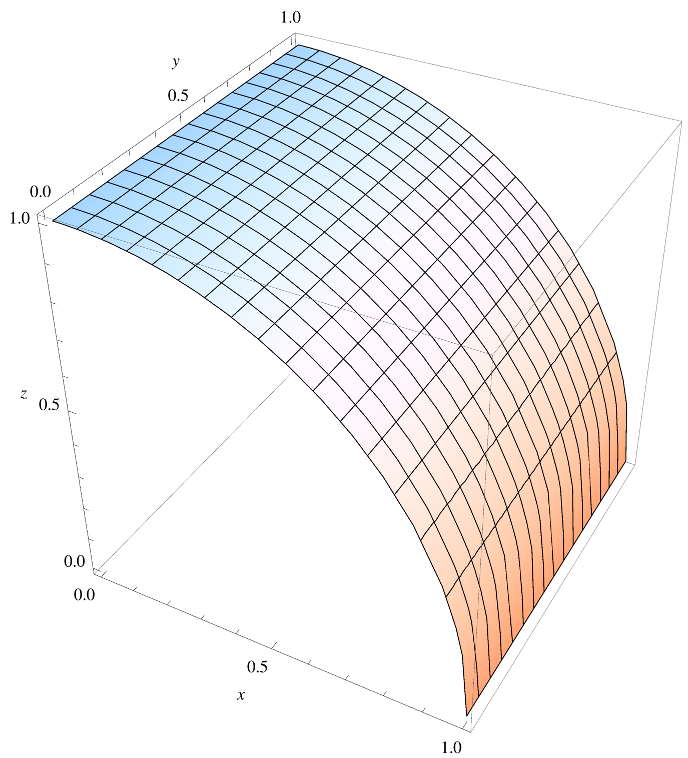

Figure 2: Aufgabe 5

7. Eine dünne Platte in der xy-Ebene mit konstanter Dichte, welche symmetrisch bezüglich der x-Achse ist, hat einen Schwerpunkt mit x-Koordinate gleich Null.

i) ✗ wahr

ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die y-Koordinate des Schwerpunktes muss Null sein. Ein Gegenbeispiel wäre das Dreieck mit Eckpunkten $(0,0),(1,1),(1,-1)$.

8. Eine dünne Platte in der xy-Ebene mit konstanter Dichte, welche symmetrisch bezüglich der x-Achse und der y-Achse ist, hat ihren Schwerpunkt im Ursprung.

i) ✓ wahr

ii) ✗ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Man sieht das sehr einfach geometrisch ein. Aber auch aus den Formeln für x_s (und analog für y_s) ist dies sofort ersichtlich, da der Zähler von x_s durch $\rho \iint_B x \, \mathrm{d}A(x,y)$ gegeben ist. Bei diesem Integral heben sich der Anteil links und rechts der y-Achse weg, woraus $x_s = 0$ folgt.

9. Der Schwerpunkt einer dünnen Platte in der xy-Ebene liegt immer innerhalb dieser Platte.

i) ✗ wahr
ii) ✓ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Aus der obigen Aufgabe wissen wir, dass der Schwerpunkt eines Kreisrings (beispielsweise mit innerem Radius 1 und äusserem Radius 2) im Ursprung liegt, da ein Kreisring symmetrisch bezüglich beider Achsen ist. Der Ursprung liegt aber nicht im Kreisring.

10. Der Schwerpunkt einer zusammenhängenden Region im Raum liegt immer innerhalb dieser Region.

i) ✗ wahr
ii) ✓ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Analog zum Kreisring ist hier eine Kugelschale ein Gegenbeispiel.