Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

MC-Serie 7

1. Die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation $x(u,v) = au\cos(v)$, $y(u,v) = bu\sin(v)$ ist

i) ✗ $abu(\cos^2(v) - \sin^2(v))$.

ii) ✗ $\begin{pmatrix} a\cos(v) & -au\sin(v) \\ b\sin(v) & bu\cos(v) \end{pmatrix}$.

iii) ✗ ab.

iv) ✓ abu.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Wir berechnen die Jacobi-Determinante:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a\cos(v) & -au\sin(v) \\ b\sin(v) & bu\cos(v) \end{pmatrix} \\ &= abu(\cos^2(v) + \sin^2(v)) = abu. \end{aligned}$$

2. Die Transformation $x = au + bv$, $y = cu + dv$ bildet im Allgemeinen Dreiecke auf Dreiecke ab.

i) ✓ wahr

ii) ✗ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es reicht zu überlegen, dass Geraden auf Geraden abgebildet werden. Dies kann man zum Beispiel so einsehen:

Eine Gerade ist gegeben, wenn die Parametrisierung $(u(t), v(t))$ einen konstanten Geschwindigkeitsvektor hat, also $(\dot{u}(t), \dot{v}(t)) = (k, m)$. Daraus folgt durch Integration $(u(t), v(t)) = (kt + l, mt + n)$. Einsetzen liefert

$$x(t) = au(t) + bv(t) = akt + al + bmt + bn,\ y(t) = cu(t) + dv(t) = ckt + cl + dmt + dn$$

und damit $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (ak + bm, ck + dm)$, also hat auch das Bild konstanten Geschwindigkeitsvektor und ist somit eine Gerade.

3. Die Transformation $x = 2v$, $y = -2u$ bildet Kreise auf Kreise ab.

i) ✓ wahr

ii) ✗ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Ein Kreis mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r ist gegeben durch die Parametrisierung

$$(u(t), v(t)) = (r \cos t + a, r \sin t + b).$$

Einsetzen liefert

$$(x(t), y(t)) = (2r \sin t + 2b, -2r \cos t - 2a).$$

Mit der Umparametrisierung $s = t - \pi/2$ folgt $t = s + \pi/2$ und damit mit den bekannten trigonometrischen Identitäten

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= (2r \sin t + 2b, -2r \cos t - 2a) \\ &= (2r \sin(s + \pi/2) + 2b, -2r \cos(s + \pi/2) - 2a) \\ &= (2r \cos s + 2b, 2r \sin s - 2a). \end{aligned}$$

Das Bild ist also ein Kreis mit Mittelpunkt $(2b, -2a)$ und Radius $2r$.

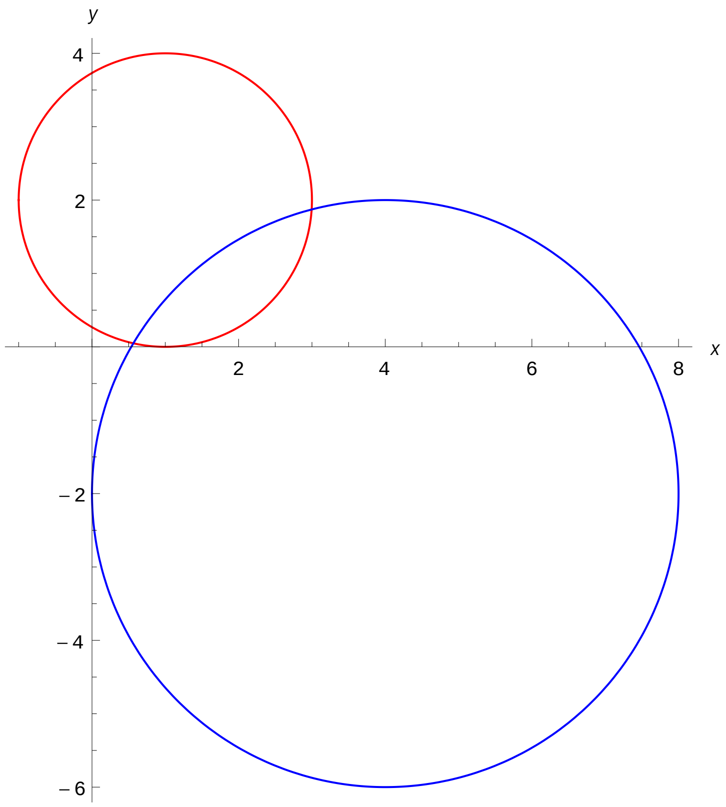
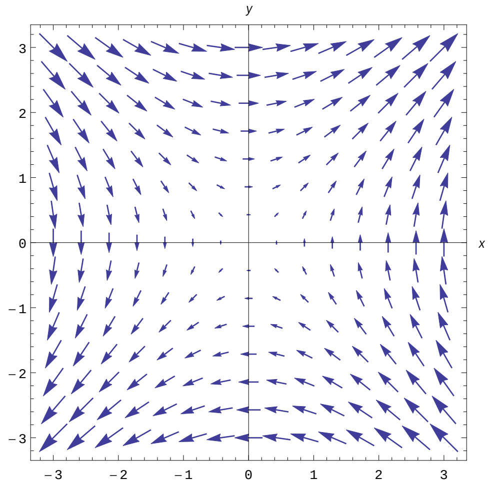


Figure 1: Ein Kreis (rot) und sein Bild (blau)

4. In den folgenden Aufgaben geht es darum, 4 Skizzen den jeweils passenden Vektorfeldern zuzuordnen.

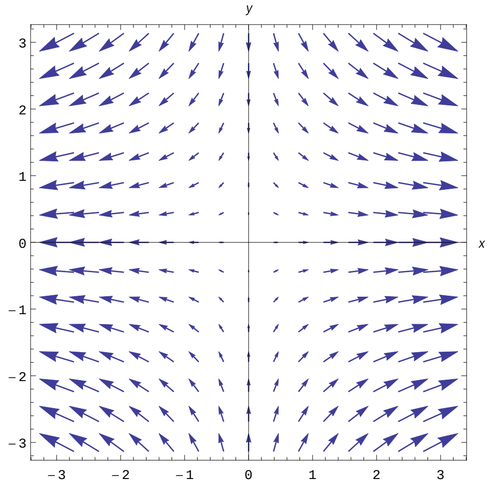
a) Welches Vektorfeld passt zu dieser Zeichnung?



i) ✗ $\mathbf{F} = (0, x^2)$.
ii) ✗ $\mathbf{F} = (x - y, x)$.
iii) ✗ $\mathbf{F} = (2x, -y)$.
iv) ✓ $\mathbf{F} = (y, x)$.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Für $x = y$ ist das Vektorfeld genau der Ortsvektor. Dies wird nur durch dieses Vektorfeld erfüllt.

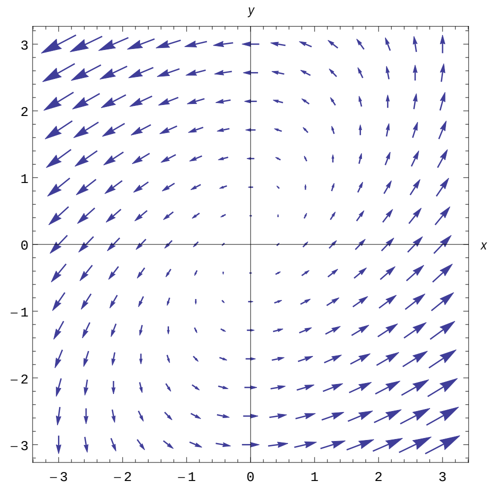
b) Welches Vektorfeld passt zu dieser Zeichnung?



i) ✗ $\mathbf{F} = (0, x^2)$.
ii) ✗ $\mathbf{F} = (x - y, x)$.
iii) ✓ $\mathbf{F} = (2x, -y)$.
iv) ✗ $\mathbf{F} = (y, x)$.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Für $y = 0$ zeigt das Vektorfeld nur in x-Richtung, was nur beim diesem Vektorfeld der Fall ist.

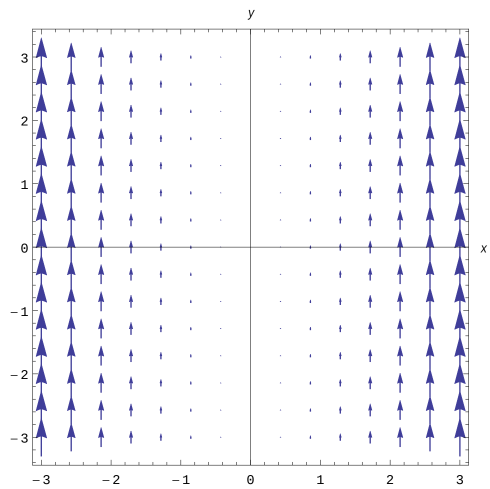
c) Welches Vektorfeld passt zu dieser Zeichnung?



i) ✗ $\mathbf{F} = (0, x^2)$.
ii) ✓ $\mathbf{F} = (x - y, x)$.
iii) ✗ $\mathbf{F} = (2x, -y)$.
iv) ✗ $\mathbf{F} = (y, x)$.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Das gezeichnete Vektorfeld ist nur auf der Geraden $x = y$ vertikal und muss daher durch die zweite Formel beschrieben werden.

d) Welches Vektorfeld passt zu dieser Zeichnung?



i) ✓ $\mathbf{F} = (0, x^2)$.
ii) ✗ $\mathbf{F} = (x - y, x)$.

iii) ✗ $\mathbf{F} = (2x, -y)$.
iv) ✗ $\mathbf{F} = (y, x)$.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Das Vektorfeld zeigt nur in y-Richtung.