Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch

FS 2016

MC-Serie 8

1. Das Vektorfeld $\mathbf{F} = (3x^2, 1)$ ist ein Gradientenfeld für $f_1(x, y) = x^3 + y$ und $f_2(x, y) = y + x^3 + 100$.

i) ✓ wahr

ii) ✗ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es gilt

$$\nabla f_1(x, y) = \nabla f_2(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{F},$$

wie eine kurze Rechnung zeigt.

2. Das Vektorfeld $\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, x)$ ist konstant in Länge und Richtung auf dem Einheitskreis.

i) ✗ wahr

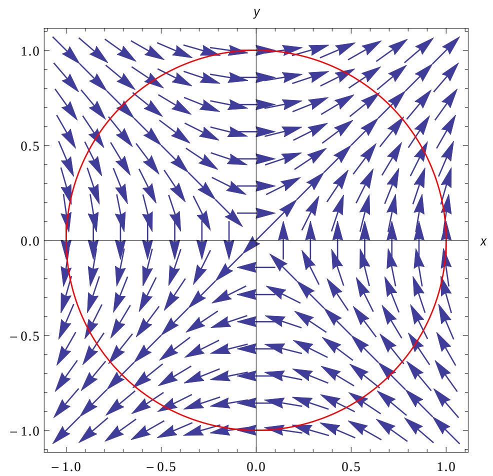
ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Der Betrag ist zwar konstant,

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left| \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1,$$

die Richtung jedoch nicht.



3. Ein Objekt bewegt sich auf einem Pfad. Dabei wirkt an jedem Punkt des Pfades eine Kraft, welche orthogonal zum Pfad ist. Dann verrichtet das Objekt keine Arbeit.

i) ✓ wahr
ii) ✗ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Arbeit ist das Linienintegral der tangentialen Komponente der Kraft entlang des Pfades. Damit ist die Arbeit gleich Null. In Formeln: Sei der Pfad C parametrisiert durch $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, so ist die Arbeit gegeben durch

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei nach Voraussetzung $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ gilt, für alle t.

4. Der Fluss eines Vektorfeldes durch eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ kann mit Hilfe eines Linienintegrals berechnet werden.

i) ✓ wahr
ii) ✗ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Für den Fluss eines Vektorfeldes $\mathbf{F}$ durch eine Kurve C gilt die bekannte Formel

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}.$$

5. Das Vektorfeld $\mathbf{F} = (y, x)$ hat keine Zirkulation entlang und keinen Fluss durch den Einheitskreis.

i) ✓ wahr
ii) ✗ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Der Einheitskreis C ist parametrisiert durch $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Damit hat der Einheitskreis Tangentialvektor $\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, der nach aussen orientierte Normalenvektor ist damit $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

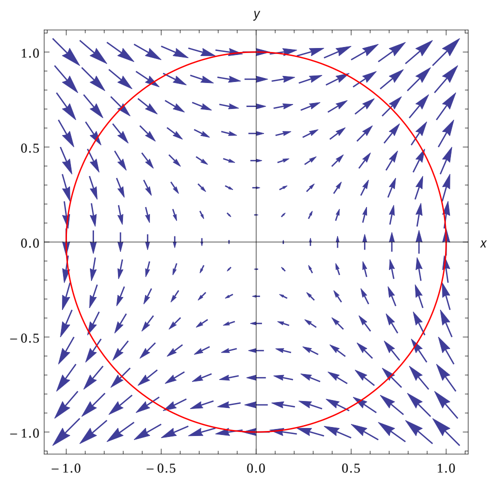
Die Zirkulation berechnet sich durch

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t\end{pmatrix}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}(-\sin^2 t+\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = 0,\end{aligned}$$

da $\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$.

Der Fluss nach aussen beträgt

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{n} &= \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\,\mathrm{d}t = \sin^2 t\big|_0^{2\pi} \\ &= 0-0=0.\end{aligned}$$



6. Die Arbeit A eines Vektorfeldes $\mathbf{F}$ längs des Geradenstücks von $(1,0,0)$ nach $(-1,-1,-1)$ sei 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit B von $\mathbf{F}$ längs des Geradenstücks von $(-1,-1,-1)$ nach $(1,0,0)$ berechnet?

i) ✗ Die Arbeit B lässt sich aus den Angaben nicht berechnen.

ii) ✗ Die Arbeit B beträgt ebenfalls 5.wer (ticked)

iii) ✓ Die Arbeit B beträgt -5.

iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Durchschreitet man einen Pfad in der entgegengesetzten Richtung, so ändert sich das Vorzeichen der Arbeit. Sei der Pfad C parametrisiert durch $\mathbf{r}(t)$, $a\le t\le b$, so ist die Arbeit A gegeben durch

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Der Pfad $\bar{C}$ in umgekehrter Richtung ist parametrisiert durch

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(-t+b+a),$$

wobei t von a bis b läuft. Damit folgt mir der Kettenregel

$$\bar{\mathbf{r}}'(t) = -\mathbf{r}'(-t+b+a),$$

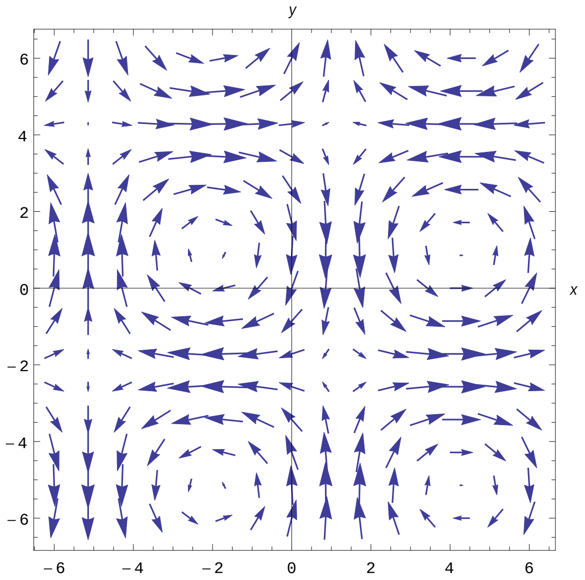
womit wir B ausrechnen können:

$$\int_{\bar{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\bar{\mathbf{r}}(t)) \cdot \bar{\mathbf{r}}'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(-t+a+b)) \cdot \mathbf{r}'(-t+a+b)\,\mathrm{d}t.$$

Mit der Koordinatentransformation $\tilde{t} = -t+a+b$ ergibt sich schliesslich

$$\int_{\bar{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_b^a \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tilde{t})) \cdot \mathbf{r}'(\tilde{t})\,(-\mathrm{d}\tilde{t}) = -\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tilde{t})) \cdot \mathbf{r}'(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t}.$$

7. Handelt es sich bei der Abbildung um ein konservatives Vektorfeld?



i) ✗ ja

ii) ✓ nein

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Es ist möglich, eine geschlossene Kurve C zu finden (z.B. einen Kreis um das Zentrum eines Wirbels), für welche das Integral $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ positiv ist. Im Falle eines konservativen Vektorfelds $\mathbf{F}$ müsste jedoch $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ gelten (und zwar für jede geschlossene Kurve C).

8. Welche der folgenden Aussagen über ein Vektorfeld $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ ist nicht äquivalent zu den anderen?

i) ✗ $\mathbf{F}$ besitzt ein Potential.

ii) ✓ $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} = \dfrac{\partial F_2}{\partial y}$

iii) ✗ $F_2 - \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\displaystyle\int F_1 \, \mathrm{d}x\Big)$ ist unabhängig von x.

iv) ✗ $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Äquivalenz (i) ⇔ (iv) ist ein Satz, und die Äquivalenz (i) ⇔ (iii) tritt in der Methode zur expliziten Bestimmung eines Potentials auf. Dagegen fällt (ii) aus dem Rahmen, indem gegenüber (iv) die partiellen Ableitungen vertauscht sind. In der Tat ist $\nabla(x^2 - y^2) = (2x, -2y)$ ein Vektorfeld mit Potential, welches die Gleichung (ii) nicht erfüllt. Also ist (ii) die richtige Antwort.

9. Welches der folgenden Vektorfelder hat ein Potential?

i) ✗ $(x - y,\, x - y)$

ii) ✗ $(x^2 - y,\, x^3 + 2xy)$

iii) ✓ $(x^3 + 2xy,\, x^2 - y)$

iv) ✗ $(x^3 - xy^2,\, x^2y - y^5)$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Ein C^1-Vektorfeld $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ besitzt ein Potential genau dann, wenn $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ ist. Diese partiellen Ableitungen sind im Fall (i) gleich $-1 \neq 1$, im Fall (ii) gleich $-1 \neq 3x^2 + 2y$, im Fall (iii) gleich $2x = 2x$, und im Fall (iv) gleich $-2xy \neq 2xy$. Also lautet die richtige Antwort (iii). Das zugehörige Potential ist in diesem Fall gleich $\frac{x^4}{4} + x^2y - \frac{y^2}{2} + c$ für eine beliebige Konstante c.

10. Das vektorielle Linienintegral $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ ist...

i) ✓ die Arbeit, die nötig ist, um ein Objekt entlang des Wegs C durch das Vektorfeld $\mathbf{F}$ zu bewegen.

ii) ✗ die Kurvenlänge von C, falls C eine Feldlinie von $\mathbf{F}$ ist.

iii) ✗ der Vektor, der entsteht, indem die Komponenten von $\mathbf{F}$ entlang C aufintegriert werden.

iv) ✗ Alle diese Antworten sind richtig.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Antwort (i) ist richtig, denn in jedem Punkt der Kurve ist das Skalarprodukt $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ gleich dem Anteil der 'Kraft' $\mathbf{F}$, der auf den Tangentialvektor c der Kurve C entfällt und somit entlang des Weges zu überwinden ist. Für (ii) folgt mit einer Parametrisierung $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ von C aus der Differentialgleichung $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ die Formel

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|^2\, \mathrm{d}t,$$

während die Kurvenlänge gleich

$$\int_C 1\, |\mathrm{d}\mathbf{r}| = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, \mathrm{d}t$$

ist. Somit ist (ii) falsch. Antwort (iii) ist schon deshalb falsch, weil das vektorielle Linienintegral durch Integration eines Skalarprodukts entsteht und somit einen Skalar als Wert besitzt. Man kann zwar jede einzelne Komponentenfunktion des Vektorfelds separat entlang C aufintegrieren im Sinne eines skalaren Linienintegrals, aber das liefert eine ganz andere Grösse ohne Bedeutung. Insgesamt ist somit (i) und nur (i) die richtige Antwort.

11. Ein konstantes Vektorfeld ist konservativ auf $\mathbb{R}^2$.

i) ✓ wahr
ii) ✗ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Da alle partiellen Ableitungen gleich Null sind, ist die Bedingung $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ immer erfüllt. Das ist äquivalent zur Tatsache, dass $\mathbf{F}$ konservativ ist.

12. Das Vektorfeld $\mathbf{F} = (f(x), g(y))$ ist konservativ auf $\mathbb{R}^2$.

i) ✓ wahr
ii) ✗ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Bedingung $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ ist immer erfüllt, da F_1 nur von x und F_2 nur von y abhängt und die beiden partiellen Ableitungen damit beide gleich Null sind. Das ist äquivalent zur Tatsache, dass $\mathbf{F}$ konservativ ist.

13. Die benötigte Arbeit um ein Objekt entlang einer geschlossenen Kurve C in einem Vektorfeld $\mathbf{F}$ zu bewegen, entspricht der Zirkulation entlang dieser Kurve.

i) ✓ wahr
ii) ✗ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Das ist die Definition der Zirkulation.

14. Das Vektorfeld $\mathbf{F} = (ax + by, cx + dy)$ ist konservativ, falls $a = c$ und $b = d$ gilt.

i) ✗ wahr
ii) ✓ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Bedingung $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ wird zu $b = c$, was nach Voraussetzung jedoch nicht gelten muss.

15. Das Vektorfeld $\mathbf{F} = (ax^2 - by^2, cxy)$ ist konservativ, falls $c = -2b$ gilt.

i) ✓ wahr
ii) ✗ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Bedingung $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ wird zu $-2by = cy$, was wegen $c = -2b$ immer erfüllt ist.