Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

MC-Serie 9

1. Sei $\mathbf{F} = (-y, x)$ und C der Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt $(1, 0)$ im Gegenuhrzeigersinn orientiert, so gilt $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$.

i) ✗ wahr
ii) ✓ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Wir bezeichnen den Kreis mit R. Mit dem Satz von Green I ergibt sich

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = 2 \cdot \text{Fläche}(R) = 32\pi.$$

Das kann man auch ohne den Satz von Green I mit einer expliziten Parametrisierung von C erhalten.

2. Sei $\mathbf{F} = (x, -y)$ und C der Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt $(1, 0)$ im Gegenuhrzeigersinn orientiert, so gilt $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$.

i) ✓ wahr
ii) ✗ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Wir bezeichnen den Kreis mit R. Mit dem Satz von Green I ergibt sich

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = \iint_R (0 - 0)\ \mathrm{d}A = 0.$$

Das kann man auch ohne den Satz von Green I mit einer expliziten Parametrisierung von C erhalten oder indem man sieht, dass $\mathbf{F}$ konservativ ist. Das bedeutet nicht nur $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = 0$, sondern auch, dass $\mathbf{F}$ ein Potential ϕ mit $\mathbf{F} = \nabla\phi$ besitzt. Dieses ist gegeben durch $\phi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

3. Wenn ein Vektorfeld Divergenz Null hat auf einem Gebiet (welches die Voraussetzungen des Satzes von Green erfüllt), so ist die Zirkulation entlang des Randes von diesem Gebiet ebenfalls gleich Null.

i) ✗ wahr
ii) ✓ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Divergenz Null bedeutet quellenfrei, Zirkulation Null hingegen konservativ (oder auch wirbelfrei). Diese beiden Begriffe sind nicht äquivalent. Ein Gegenbeispiel findet sich weiter oben: $\mathbf{F} = (-y, x)$ hat Divergenz Null auf ganz $\mathbb{R}^2$, jedoch ist die Zirkulation entlang jedes Kreises ungleich Null.

4. Wenn ein Vektorfeld positive zwei-dimensionale Rotation hat auf einem Gebiet (welches die Voraussetzungen des Satzes von Green erfüllt), so ist die Zirkulation entlang des Randes von diesem Gebiet ebenfalls positiv (im Gegenuhrzeigersinn).

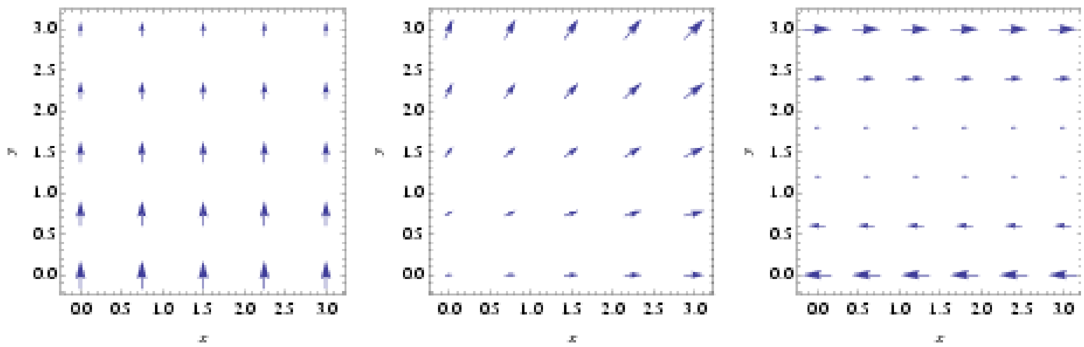
i) ✓ wahr
ii) ✗ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Der Satz von Green I besagt (das Gebiet bezeichnen wir als R und den Rand als C)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = \iint_R \underbrace{\mathrm{rot}(\mathbf{F})}_{\geq 0} \mathrm{d}A.$$

Ein Doppelintegral einer positiven Funktion über einer Fläche ist wieder positiv.

5. Die folgenden drei Abbildungen zeigen jeweils ein dreidimensionales Vektorfeld $\mathbf{F}$ in der x-y-Ebene. Das Vektorfeld soll in allen dazu parallelen Ebenen identisch aussehen, d.h. $\mathbf{F}$ ist unabhängig von z und seine z-Komponente ist konstant gleich 0.



a) Welche Aussage stimmt?

i) ✗ Die Divergenz ist für alle drei Abbildungen gleich Null.
ii) ✓ Im linken Bild gilt $\mathrm{div}\,\mathbf{F} < 0$, im mittleren Bild gilt $\mathrm{div}\,\mathbf{F} > 0$ und im rechten Bild gilt $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 0$.
iii) ✗ Im linken Bild gilt $\mathrm{div}\,\mathbf{F} > 0$, im mittleren Bild gilt $\mathrm{div}\,\mathbf{F} < 0$ und im rechten Bild gilt $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 0$.
iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung

$$\text{Vektorfeld} \quad \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Gemäss Aufgabenstellung gilt: $(i)\quad \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = 0, \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = 0,$

$(ii)\quad F_3 = 0.$

Definition der Divergenz:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Wegen $F_3 = 0$ wissen wir, dass $\frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$ gilt.

Linkes Bild:
Die Pfeile verlaufen vertikal. $\Rightarrow \quad F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} = 0$
Von unten nach oben nimmt die y - Komponente ab. $\Rightarrow \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} < 0$
Also: $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$.

Mittleres Bild:
x - Komponente nimmt von links nach rechts zu. $\Rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} > 0$
y - Komponente nimmt von unten nach oben zu. $\Rightarrow \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} > 0$
Also: $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$.

Rechtes Bild:
x - Komponente bleibt von links nach rechts konstant. $\Rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} = 0$
Die Pfeile verlaufen horizontal. $\Rightarrow \quad F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0$
Also: $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.

b) Welche Aussage stimmt?

i) ✗ Die Rotation ist für alle drei Abbildungen gleich dem Nullvektor.
ii) ✗ Im linken, mittleren bzw. rechten Bild zeigt $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ in die Richtung $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ bzw. $(1,0,0)$.
iii) ✓ Im linken Bild und mittleren Bild gilt $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0,0,0)$. Im rechten Bild zeigt die Rotation in die Richtung $(0,0,-1)$.
iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$ und $F_3 = 0$ können wir dies zu vereinfachen zu

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Linkes Bild:
Pfeile verlaufen vertikal. $\Rightarrow \quad F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$
y - Komponente bleibt von links nach rechts konstant. $\Rightarrow \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$
Also: $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0, 0, 0)$.

Mittleres Bild:
x - Komponente bleibt von unten nach oben konstant. $\Rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$
y - Komponente bleibt von links nach rechts konstant. $\Rightarrow \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$
Also: $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0, 0, 0)$.

Rechtes Bild:
Pfeile verlaufen horizontal. $\Rightarrow \quad F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$
x - Komponente nimmt von unten nach oben zu. $\Rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} > 0$
Also ist $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ ungleich dem Nullvektor und zeigt in die Zeichenebene (Richtung $(0, 0, -1)$).

6. Klicken Sie die **falsche** Aussage an:

i) ✗ div ordnet einem Vektorfeld ein Skalarfeld zu.
ii) ✓ $\operatorname{div}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)$
iii) ✗ ∇ ordnet einem Skalarfeld ein Vektorfeld zu.
iv) ✗ $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F})$ ist eine sinnvolle Bildung.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Mit den Definitionen

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

und

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ist ii) falsch und i) und iii) richtig. Ebenfalls richtig ist iv), denn der Ausdruck ist gleich

$$\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F}) = \nabla\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)}{\partial x} \\ \frac{\partial\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)}{\partial y} \\ \frac{\partial\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

7. Wir betrachten den Würfel

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |z| \leq 1\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 - z^2 \\ xy^2z \\ 2xz \end{pmatrix}.$$

Wo in Q hat $\operatorname{div} \mathbf{F}$ den grössten Betrag?

i) ✗ In den Punkten $(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,-1,1), (-1,1,-1)$.

ii) ✓ In den Punkten $(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,1), (-1,-1,-1)$.

iii) ✗ Im Ursprung.

iv) ✗ In allen Punkten von Q.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2x + 2xyz + 2x = 4x + 2xyz.$$

Wir schätzen nun den Betrag nach oben ab:

$$|\operatorname{div} \mathbf{F}| = |4x + 2xyz| \leq 4|x| + 2|x| \cdot |y| \cdot |z| \leq 4 + 2 = 6.$$

Wenn der Betrag also gleich 6 ist, dann liegt ein Maximum vor und das ist genau bei den Punkten aus ii) der Fall. Beachte, dass für die beiden letzten Punkte $\operatorname{div} \mathbf{F} = -6$ gilt.

8. Wenn für eine Funktion f in einer Variablen $f'(x) = 0$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich gilt, so ist diese konstant. Wenn für ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ analog $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ gilt für alle Punkte im Definitionsbereich, so ist $\mathbf{F}$ ebenfalls konstant.

i) ✗ wahr

ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Ein einfaches Gegenbeispiel ist $\mathbf{F} = (y, x, 0)$.

9. Falls $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ gilt, so ist $\mathbf{F}$ konstant.

i) ✗ wahr

ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Ein einfaches Gegenbeispiel ist $\mathbf{F} = (x, y, z)$.

10. Ein Vektorfeld, welches aus parallelen Vektoren besteht, hat Rotation Null.

i) ✗ wahr

ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Ein einfaches Gegenbeispiel ist $\mathbf{F} = (y, 0, 0)$. Dieses zeigt nur in x-Richtung, also sind auch alle Vektoren parallel. Die Rotation beträgt jedoch konstant $(0, 0, -1)$.

11. Ein Vektorfeld, welches aus parallelen Vektoren besteht, hat Divergenz Null.

i) ✗ wahr

ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Ein einfaches Gegenbeispiel ist $\mathbf{F} = (x, 0, 0)$. Dieses zeigt nur in x-Richtung, also sind auch alle Vektoren parallel. Die Divergenz beträgt jedoch konstant 1.

12. $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ und $\mathbf{F}$ stehen senkrecht aufeinander.

i) ✗ wahr

ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Ein einfaches Gegenbeispiel ist $\mathbf{F} = (x, x^2, x)$ mit $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, -1, 2x)$. Das Skalarprodukt dieser beiden Vektorfelder beträgt $-x^2 + 2x^2 = x^2$, ist also ungleich Null für $x \neq 0$.

13. Unter welchen Bedingungen besitzt das Kraftfeld

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

eine Strömungsfunktion?

i) ✗ $\operatorname{rot} \mathbf{K} = 0$.

ii) ✓ $\operatorname{div} \mathbf{K} = 0$.

iii) ✓ $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} K_2 \\ -K_1 \end{pmatrix} = 0$.

iv) ✗ $\operatorname{div} \begin{pmatrix} K_2 \\ -K_1 \end{pmatrix} = 0$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Ein Strömungspotential ψ erfüllt

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x, \end{pmatrix}.$$

Wegen $\operatorname{div} \mathbf{K} = \psi_{xy} - \psi_{yx} = 0$ muss das Kraftfeld $\mathbf{K}$ also $(K_1)_x + (K_2)_y = 0$ erfüllen und damit sind (ii) und (iii) richtig.

14. Das Kraftfeld

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

besitzt ein Potential. Welche Aussagen sind richtig?

i) ✓ Das Wegintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.

ii) ✗ Das Flussintegral über geschlossene Wege ist gleich Null.

iii) ✓ $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} K_2 \\ -K_1 \end{pmatrix}$ besitzt eine Strömungsfunktion.

iv) ✗ $\mathbf{K}$ besitzt eine Strömungsfunktion.

v) ✓ $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -K_2 \\ K_1 \end{pmatrix}$ besitzt eine Strömungsfunktion.

vi) ✗ weiss ich nicht

- **Lösung**
  Wenn ein Potential existiert, dann ist das Vektorfeld konservativ.
- **Lösung**
  Nicht der Fluss ist gleich Null, sondern die Zirkulation (oder Arbeit).
- **Lösung**
  Da $\mathbf{K}$ ein Potential besitzt, gilt $\operatorname{rot} \mathbf{K} = (K_2)_x - (K_1)_y = 0$, also gilt $\operatorname{div} \mathbf{L} = 0$.
- **Lösung**
  $\operatorname{rot} \mathbf{K} = 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{K} = 0$ sind nicht äquivalent.
- **Lösung**
  Da $\mathbf{K}$ ein Potential besitzt, gilt $\operatorname{rot} \mathbf{K} = (K_2)_x - (K_1)_y = 0$, also gilt $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$.