Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

MC-Serie 11

1. Prüfungsaufgabe, Winter 2016. Sei $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset^3$ mit der Eigenschaft, dass $|\mathbf{F}(x,y,z)| < 1$ für alle $(x,y,z) \in \partial D$ so gilt

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V < \text{Flächeninhalt}\,(\partial D)$$

i) ✓ wahr
ii) ✗ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Nach dem Satz von Gauss gilt

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{S} \leq \sup_{(x,y,z)\in\partial D} |\mathbf{F}(x,y,z)| \cdot \iint_{\partial D} \mathrm{d}S < \text{Flächeninhalt}(\partial D).$$

2. Prüfungsaufgabe, Winter 2016. Für das Vektorfeld

$$\mathbf{F} \colon (x,y,z) \mapsto (x^\alpha yz, xy^\beta z, -2xyz^2)$$

gilt

$$\iint_S \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = 0, \text{ für alle geschlossenen Flächen } S,$$

genau dann, wenn $\alpha = \beta = 2$.

i) ✓ wahr
ii) ✗ falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

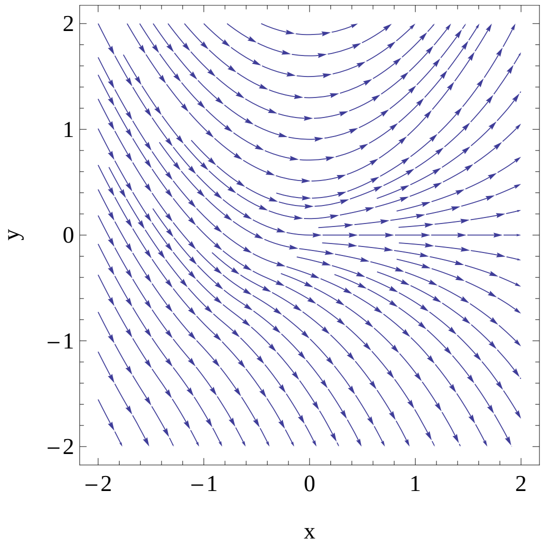
Lösung
Nach dem Satz von Gauss gilt

$$\iint_S \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F} \, \mathrm{d}V.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \text{ für alle geschlossenen Flächen } S &\Leftrightarrow \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F} \, \mathrm{d}V \text{ für alle Gebiete } D \\ &\Leftrightarrow \operatorname{div}\mathbf{F} = \alpha x^{\alpha-1} yz + \beta x y^{\beta-1} z - 4xyz = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = 2. \end{aligned}$$

3. Welche der folgenden Differentialgleichungen hat das gegebene Richtungsfeld?



i) ✗ $y' = x + y$.

ii) ✗ $y' = x - y$.

iii) ✓ $y' = \min\{x, y\}$.

iv) ✗ $y' = \max\{x, y\}$.

v) ✗ $y' = |y| - |x|$.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die korrekte Antwort lautet (iii). Die anderen kann man auf verschiedene Weisen ausschliessen. Zum Beispiel ist die Richtung entlang der positiven x-Achse und der positiven y-Achse horizontal, also gilt dort $y' = 0$, und das ist nur in (iii) der Fall. Oder man stellt fest, dass die Steigung entlang keiner der beiden Diagonalen gleich Null ist, was (i), (ii) und (v) ausschliesst. Oder man entdeckt, dass die Richtung oberhalb der Hauptdiagonalen nur von y und unterhalb davon nur von x abhängt, was auch das nur für (iii) gilt. Usw.

4. Betrachten Sie die Tangente an den Graphen der Funktion $x \mapsto y(x)$ im Punkt $(x, y(x))$. Wie lautet die Differentialgleichung dafür, dass diese Tangente die x-Achse im vorgegebenen Abstand c vom Punkt $(x, 0)$ schneidet?

i) ✗ $x - \frac{y}{y'} = c$.

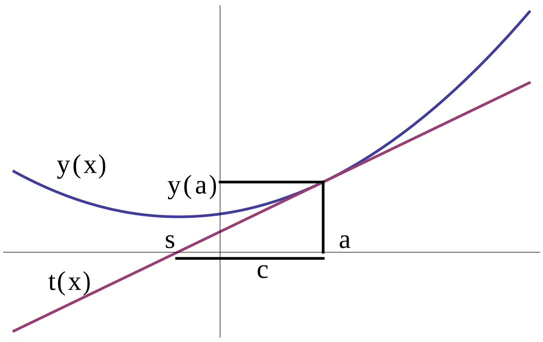
ii) ✗ $\frac{y}{y'} = c$.

iii) ✗ $yy' = c$.

iv) ✓ $\left|\frac{y}{y'}\right| = c$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung



Die Tangente schneidet die x-Achse in dem Punkt $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$, wie beim Newton-Verfahren. Sein Abstand von dem Punkt $(x, 0)$ ist der Absolutbetrag der Differenz, also ist (iv) korrekt. Genauer: Die Tangente $t(x)$ an $y(x)$ im Punkt a erfüllt die Gleichung

$$y = t(x) = y'(a)(x - a) + y(a),$$

der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ergibt sich durch Einsetzen des Punktes $(s, 0)$ in diese Tangentengleichung, also

$$0 = y'(a)\underbrace{(s - a)}_{=\pm c} + y(a),$$

was zur Lösung $\left|\frac{y(x)}{y'(x)}\right| = c$ führt.

5. Klicken Sie die **falsche** Aussage an:

Die Differentialgleichung $\frac{x^2}{2}y'' - xy' + y = 0$

i) ✗ besitzt die Funktion $y : x \mapsto x$ als Lösung.

ii) ✗ besitzt die Funktion $y : x \mapsto x^2$ als Lösung.

iii) ✗ besitzt unendlich viele Lösungen.

iv) ✓ besitzt genau zwei Lösungen.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Funktionen $y(x) = ax + bx^2$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sind alle Lösungen der Differentialgleichung, wie wir durch Einsetzen sofort sehen:

$$\frac{x^2}{2}(ax + bx^2)'' - x(ax + bx^2)' + (ax + bx^2) = \frac{x^2}{2} \cdot 2b - x \cdot (a + 2bx) + ax + bx^2 = 0.$$

Die Gleichung besitzt also unendlich viele Lösungen, darunter $y(x) = x$ und $y(x) = x^2$.