Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

MC-Serie 13

1. Mit *Variation der Konstanten* für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung meint man

i) ✗ die Tatsache, dass die Lösung der Differentialgleichung nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.

ii) ✗ die Art, wie die Lösung von den in der Differentialgleichung vorkommenden Konstanten abhängt.

iii) ✗ das Verfahren, zuerst die allgemeine Lösung zu bestimmen und danach die Integrationskonstante zu berechnen, welche die gegebene Anfangsbedingung garantiert.

iv) ✓ den Ansatz $y(x) = C(x) \cdot Y(x)$ für eine Lösung $Y(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer noch zu bestimmenden Funktion $C(x)$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Alle Antworten nennen relevante Aspekte von Differentialgleichungen, aber mit *Variation der Konstanten* ist spezifisch der Ansatz (iv) gemeint.

2. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

i) ✗ $y' + y^2 + x = 0$

ii) ✗ $y'^2 + y + x = 0$

iii) ✓ $y' + x^2 y = 0$

iv) ✗ $y' + xy^2 = 0$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für eine Funktion $y(x)$ muss linear in y und y' sein, aber nicht notwendigerweise in x. Also ist (iii) die richtige Antwort.

3. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

i) ✗ Jede separierbare Differentialgleichung ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

ii) ✗ Jede lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

iii) ✓ Jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

iv) ✗ Jede homogene Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Eine homogene lineare Differentiagleichung 1. Ordnung hat die Form $y' = p(x)y$ und ist damit separierbar. Für alle anderen Aussagen lassen sich Gegenbeispiele finden: Zu (i) ist $y' = \sin y$ separierbar, jedoch keine lineare Differentialgleichung, zu (ii) ist $y' + xy = \sin x$ eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, welche nicht separierbar ist und zu (iv) ist $y' + \sin(x)y + y^2 = 0$ zwar homogen und 1. Ordnung, jedoch nicht separierbar. Richtig ist also (iii).

4. Wie lautet die charakteristische Gleichung der DGL $y''' + 2y' + y = 0$?

i) ✓ $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$
ii) ✗ $\lambda^3 + 2\lambda = 0$
iii) ✗ $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
iv) ✗ $1 + 2\lambda^2 + \lambda^3 = 0$
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ in die DGL liefert die charakteristische Gleichung $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$.

5. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ ist falsch?

i) ✗ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1 - e$.
ii) ✗ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$.
iii) ✗ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1 - e$ und $y(1) = 0$.
iv) ✗ Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \to \infty$.
v) ✓ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \to -\infty$.
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$ mit den einfachen Nullstellen -2 und -1, also lautet die allgemeine Lösung $y = Ae^{-2x} + Be^{-x}$ für Konstanten A und B. Dann ist $y(0) = A + B$ und $y(1) = Ae^{-2} + Be^{-1}$. Für beliebige Randwerte $y(0)$ und $y(1)$ sind diese Gleichungen simultan lösbar; somit sind die Aussagen (i) bis (iii) richtig. Auch (iv) ist richtig, weil es eine Lösung mit diesem Startwert gibt und jede (!) Lösung für $x \to \infty$ beschränkt bleibt. Dagegen geht jede von Null verschiedene Lösung für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$; deshalb ist (v) falsch. Die korrekte Antwort lautet also (v).

6. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ ist falsch?

i) ✗ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

ii) ✗ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -3$.

iii) ✓ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.

iv) ✗ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Aussagen (i) und (iv) sind richtig nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz – sogar ohne jede Rechnung. In (iii) ist dagegen eine Nebenbedingung zuwenig, und nach demselben Satz existiert zu jedem beliebigen zweiten Startwert $y'(0)$ eine Lösung. Es existieren also unendlich viele Lösungen in (iii), und deshalb ist die Aussage (iii) falsch. In (ii) ist zwar eine Nebenbedingung zuviel, und das kann im Allgemeinen dazu führen, dass keine Lösung existiert. Das Beispiel war aber gerade so gewählt, dass es eine gibt, nämlich $e^{-x} - e^{-2x}$, wie man durch Ansatz und Koeffizientenvergleich (vgl. vorhergehende Aufgabe) feststellt, so dass (ii) in diesem Fall richtig ist. Die korrekte Antwort lautet also (iii).

7. Wir betrachten die DGL $y'(x)^2 + y(x)^2 = 0$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

i) ✗ Die DGL hat unendlich viele reelle Lösungen.

ii) ✓ Die DGL hat genau eine reelle Lösung.

iii) ✗ Die DGL ist nicht lösbar.

iv) ✗ Die DGL hat reelle Lösungen mit $|y(x)| \to \infty$ für $x \to \infty$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die DGL impliziert sofort $y(x) = y'(x) = 0$, insbesondere also $y(x) = 0$, was eine eindeutige Lösung ist.