Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

MC-Serie 14

1. Wie lautet die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung

$$y''' + 2y' + y = x^2 + 5?$$

i) ✓ $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$
ii) ✗ $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = x^2 + 5$
iii) ✗ $\lambda^3 + 2\lambda = 0$
iv) ✗ $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
v) ✗ $1 + 2\lambda^2 + \lambda^3 = 0$
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die linke Seite der Differentialgleichung ist $y''' + 2y' + y$, mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ erhalten wir also das charakteristische Polynom $\lambda^3 + 2\lambda + 1$. Die richtige Antwort ist also (i). Die Aussage (ii) ist Humbug, weil die rechte Seite der Differentialgleichung in der charakteristischen Gleichung für die Eigenwerte gar nichts zu suchen hat. Bei den Gleichungen (iii) - (v) wurde falsch abgeleitet, bzw. ein Summand vergessen.

2. Was kann man über eine Differentialgleichung der Form $y'' + ay' + by = e^x$ mit konstanten Koeffizienten a und b immer sagen?

i) ✗ Ihre Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.
ii) ✗ Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt αe^x für eine Konstante α.
iii) ✗ Ihre allgemeine Lösung lautet $y_h(x) + \alpha e^x$ für eine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Gleichung sowie eine Konstante α.
iv) ✓ Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, e^x$ für Konstanten $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Aussage (i) wäre richtig für eine homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung 2, aber diese hier ist inhomogen und dann ist der Lösungsraum ein affiner Raum. Aussage (ii) ist nur dann richtig, wenn $\lambda = 1$ kein Eigenwert der linken Seite ist, also nicht immer. Aussage (iii) ist äquivalent zu (ii), also ebenfalls nicht immer richtig. Aussage (iv) ist korrekt, denn die Multiplizität von $\lambda = 1$ als Eigenwert der linken Seite ist stets ≤ 2, und daher gibt es immer eine partikuläre Lösung der Gestalt $p(x)e^x$ für ein Polynom $p(x)$ vom Grad ≤ 2.

3. Welche der gegebenen Zahlen ist für die Lösung $y(x)$ des Anfangwertproblems

$$x \cdot y'(x) - y(x) = x, \quad y(1) = 1$$

die beste Approximation von $y(2)$?

i) ✗ 2
ii) ✓ 4
iii) ✗ 5
iv) ✗ 7
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Zunächst bestimmen wir $y(x)$. Die homogene Gleichung

$$x \cdot y'(x) - y(x) = 0$$

lösen wir mit Separation:

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{y'}{y} & = & \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow & \frac{\mathrm{d}y}{y} & = & \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \Leftrightarrow & \int \frac{\mathrm{d}y}{y} & = & \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \Leftrightarrow & \ln|y| & = & \ln|x| + C \\ \Leftrightarrow & |y| & = & e^{\ln|x|+C} = C_2|x| \\ \Leftrightarrow & y(x) & = & C_3 x. \end{array}$$

Wir wenden nun zum Beispiel Variation der Konstanten an und machen damit den Ansatz

$$y(x) = C_3(x) \cdot x.$$

Diesen setzen wir in die DGL ein und erhalten

$$x = x(C_3'(x)x + C_3(x)) - C_3(x)x = C_3'(x)x^2,$$

also $C_3'(x) = \frac{1}{x}$ und damit $C_3 = \ln|x| + C_4$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = (\ln|x| + C_4)x = C_4 x + x\ln|x|.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ liefert

$$1 = y(1) = C_4$$

und wir erhalten

$$y(x) = x + x\ln|x|.$$

Die Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$ der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ lautet

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

damit gilt (wenn wir $x = 1$ setzen)

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Da die Folgenglieder dieser Reihe eine alternierende, im Betrag monoton fallende Nullfolge bilden, erhalten wir nach dem ersten Glied eine obere Schranke für die Summe und nach dem zweiten Glied eine untere Schranke. Es gilt also $\ln 2 \in (\frac{1}{2}, 1)$. Damit gilt aber auch

$$y(2) = 2 + 2\ln 2 \in (3, 4)$$

und 4 ist die beste gegebene Approximation.

4. Bestimmen Sie die Form der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 3e^{2x}.$$

i) ✓ $C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + 3e^{2x}$
ii) ✗ $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \sin x + axe^{2x}$
iii) ✗ $C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3e^{2x}$
iv) ✗ $C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + \frac{3}{2} e^{2x}$
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Wir lösen zuerst das homogene System

$$y'' - 4y' + 5y = 0,$$

welches das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ besitzt. Die Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ und die allgemeine homogene Lösung lautet

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x.$$

Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen, wählen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Ae^{2x},$$

eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} 3e^{2x} &= 4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 5Ae^{2x} \\ &= Ae^{2x}, \end{aligned}$$

also $A = 3$ und

$$C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + 3e^{2x}.$$

5. Es sei bekannt, dass $y(x) = e^{2x}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 5y'(x) + ky(x) = 0$$

ist. Bestimmen Sie den Wert von $k \in \mathbb{R}$.

i) ✗ -14

ii) ✗ -6

iii) ✗ -4

iv) ✓ 6

v) ✗ weiss ich nicht

- **Lösung**
  Da e^{2x} eine Lösung dieser homogenen Gleichung ist, muss 2 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein. Dieses lautet $\lambda^2 - 5\lambda + k$. Setzen wir hier $\lambda = 2$ ein, so muss also
  $$2^2 - 5 \cdot 2 + k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = 6$$
  gelten.
- **Lösung**
  Alternativ kann man sich auch folgendes überlegen: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind
  $$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4k}}{2}.$$
  Wir lösen damit die Gleichung
  $$\begin{aligned} \tfrac{5 \pm \sqrt{25-4k}}{2} &= 2 \\ \Leftrightarrow \quad 5 \pm \sqrt{25 - 4k} &= 4 \\ \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{25 - 4k} &= -1. \end{aligned}$$
  Auf der linken Seite kommt somit nur das negative Vorzeichen in Frage und die daraus resultierende Gleichung $25 - 4k = 1$ liefert $k = 6$.

6. Was ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 0?$$

i) ✗ $Ae^{2x} + Be^{5x}$

ii) ✓ $Ae^{2x} + Be^{-5x}$

iii) ✗ $Ae^{-2x} + Be^{5x}$

iv) ✗ $Ae^{-2x} + Be^{-5x}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 3\lambda - 10$ hat die beiden Nullstellen -5 und 2, damit ist (ii) die korrekte Antwort.

7. Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'' - 7y = 0$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

i) ✗ Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind 0 und 7.

ii) ✗ Diese Differentialgleichung hat keine charakteristische Gleichung.

iii) ✗ Die charakteristische Gleichung hat $\sqrt{7}$ als doppelte Nullstelle.

iv) ✓ Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind $\pm\sqrt{7}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die charakteristische Gleichung lautet $\lambda^2 - 7 = 0$ und hat die Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{7}$

8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{x}{1+x}\,y(x) = 1 + x.$$

i) ✗ $1 + x + C$

ii) ✗ $C(1 + x)$

iii) ✓ $1 + Ce^{-x})(1 + x)$

iv) ✗ $e^{-x}(x + \frac{x^2}{2} + C)(1 + x)$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Wir lösen die homogene Gleichung

$$y' + \frac{xy}{1+x} = 0$$

mit Separation:

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{y'}{y} & = & -\frac{x}{1+x} \\ \Leftrightarrow & \frac{\mathrm{d}y}{y} & = & -\frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow & \int \frac{\mathrm{d}y}{y} & = & -\int \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x = -\int \frac{1+x-1}{1+x}\mathrm{d}x = \int \left(-1 + \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow & \ln|y| & = & -x + \ln|1+x| + C \\ \Leftrightarrow & |y| & = & e^{-x+\ln|1+x|+C} = C_2 e^{-x}|1+x| \\ \Leftrightarrow & y_h(x) & = & C_3 e^{-x}(1+x). \end{array}$$

Wir wenden nun zum Beispiel Variation der Konstanten an und machen damit den Ansatz

$$y(x) = C_3(x)e^{-x}(1+x).$$

Diesen setzen wir in die DGL ein und erhalten

$$\begin{aligned} 1 + x &= C_3'(x)e^{-x}(1+x) + C_3(x)(-e^{-x}(1+x) + e^{-x}) + \frac{x}{1+x}C_3(x)e^{-x}(1+x) \\ &= C_3'(x)e^{-x}(1+x) \end{aligned}$$

und damit $C_3'(x) = e^x$ und $C_3(x) = e^x + C_4$. Die allgemeine inhomogene Lösung lautet damit

$$y(x) = (e^x + C_4)(1+x)e^{-x} = (1 + C_4 e^{-x})(1+x),$$

somit stimmt Aussage (iii).

9. Zwischenprüfung Winter 2014. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = 0.05W - 200$$

lautet ...

i) ✗ $W(t) = Ae^{t} + 4000$ für $A \in \mathbb{R}$.
ii) ✗ $W(t) = Ae^{-10t}$ für $A \in \mathbb{R}$.
iii) ✗ $W(t) = \frac{Ae^{0.05t}}{0.05}$ für $A \in \mathbb{R}$.
iv) ✓ $W(t) = Ae^{0.05t} + 4000$ für $A \in \mathbb{R}$.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die homogene Gleichung lautet $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} - 0.05W = 0$ und hat das charakterische Polynom $\lambda - 0.05 = 0$. Die allgemeine homogene Lösung lautet somit $Ae^{0.05t}$. Für die partikuläre Lösung wählen wir den konstanten Ansatz $q(t) = B$, wenn wir diesen in die inhomogene Gleichung einsetzen, dann ergibt sich $B = 4000$. Die allgemeine inhomogene Lösung ist die Summe der allgemeinen homogenen Lösung und der partikulären Lösung.

10. Zwischenprüfung Winter 2014. Bestimmen Sie die Form der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + 16y(x) = e^{3x}.$$

i) ✓ $y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + \frac{1}{25}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
ii) ✗ $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{25}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
iii) ✗ $y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + \frac{1}{5}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
iv) ✗ $y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + \frac{1}{25}e^{4x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
v) ✗ $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{5}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die homogene Gleichung lautet $y''(x) + 16y(x) = 0$ und hat das charakterische Polynom $\lambda^2 + 16 = 0$ mit den Lösungen $\lambda = \pm 4i$. Die allgemeine homogene Lösung lautet somit $c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$. Für die partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz $q(x) = Be^{3x}$, wenn wir diesen in die inhomogene Gleichung einsetzen, dann ergibt sich $9Be^{3x} + 16Be^{3x} = e^{3x}$ und daraus $B = \frac{1}{25}$. Die allgemeine inhomogene Lösung ist die Summe der allgemeinen homogenen Lösung und der partikulären Lösung.