Serie 2

1. *(Wilson'sche Formel)*

Die Wilson'sche Formel in der Warenwirtschaft besagt, dass für ein Lager die Bestellmenge Q einer Ware durch die Formel

$$Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}} \tag{1}$$

gegeben ist. Dabei steht K für die Bestellkosten, M für die pro Woche verkaufte Stückzahl und h sind die wöchentlichen Lagerkosten pro Stückzahl. Gegenüber welcher der Variablen K, M und h ist Q in der Nähe des Punkts $(K_0, M_0, h_0) = (2, 20, 0.05)$ am empfindlichsten?

Lösung

Wir Betrachten das totale Differential

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q(K,M,h) &= Q_K \mathrm{d}K + Q_M \mathrm{d}M + Q_h \mathrm{d}h \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2M}{h}}{\sqrt{\frac{2KM}{h}}} \mathrm{d}K + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2K}{h}}{\sqrt{\frac{2KM}{h}}} \mathrm{d}M + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{-2MK}{h^2}}{\sqrt{\frac{2KM}{h}}} \mathrm{d}h \\ &= \sqrt{\frac{M}{2Kh}} \mathrm{d}K + \sqrt{\frac{K}{2Mh}} \mathrm{d}M - \sqrt{\frac{KM}{2h^3}} \mathrm{d}h. \end{aligned}$$

Für $(K_0, M_0, h_0) = (2, 20, 0.05)$ gilt folglich

$$\mathrm{d}Q(K_0, M_0, h_0) = 10\mathrm{d}K + \mathrm{d}M - 400\mathrm{d}h.$$

Die Bestellmenge reagiert also am empfindlichsten auf eine Änderung der Lagerkosten.

Bemerkung: Wir betrachten hier die absolute Änderung der verschiedenen Faktoren in den entsprechenden Einheiten. Um eine Folgerung aus diesem Resultat zu ziehen, muss man sich also noch überlegen, inwiefern diese Grössen miteinander vergleichbar sind.

2. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = x\, e^y$$

im Punkt $(1, 0)$. Vergleichen Sie die Werte von Taylorpolynom und f an der Stelle $(0.9, 0.1)$.

Lösung

Das Taylorpolynom 2. Ordnung einer Funktion $f(x, y)$ im Punkt (a, b) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = {} & f(a,b) + f_x(a,b) \cdot (x-a) + f_y(a,b) \cdot (y-b) \\ & + \tfrac{1}{2} f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(a,b)(y-b)^2. \end{aligned}$$

Für die vorliegende Funktion $f(x,y) = xe^y$ ergibt sich mit dem Entwicklungspunkt $(a,b) = (1,0)$

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= xe^y & &\Rightarrow f(1,0) = 1 \cdot e^0 = 1,\\
f_x(x,y) &= e^y & &\Rightarrow f_x(1,0) = e^0 = 1,\\
f_y(x,y) &= xe^y & &\Rightarrow f_y(1,0) = 1 \cdot e^0 = 1,\\
f_{xx}(x,y) &= 0 & &\Rightarrow f_{xx}(1,0) = 0,\\
f_{xy}(x,y) &= e^y & &\Rightarrow f_{xy}(1,0) = e^0 = 1,\\
f_{yy}(x,y) &= xe^y & &\Rightarrow f_{yy}(1,0) = 1 \cdot e^0 = 1.
\end{aligned}$$

Das gesuchte Taylorpolynom ist also

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) = 1 + 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (x-1)^2\\
+ 1 \cdot (x-1)(y-0) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (y-0)^2\\
= x + xy + \frac{1}{2}y^2.
\end{aligned}$$

An der Stelle $(0.9, 0.1)$ hat die Funktion den exakten Wert

$$f(0.9, 0.1) = 0.9e^{0.1} = 0.994654...$$

Im Gegensatz dazu erhalten wir als Näherung mittels Taylorpolynom

$$T_2(0.9, 0.1) = 0.995.$$

Dies entspricht einenm relativen Fehler von

$$\frac{|f(0.9, 0.1) - T_2(0.9, 0.1)|}{f(0.9, 0.1)} \approx 0.035\%.$$

3. a) Sei $x(t) = \cos(\pi t)$ und $y(t)$ diejenige Stammfunktion von e^{-t^2}, welche an der Stelle $t = 1$ den Wert 42 annimmt. Weiterhin sei $f(x,y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie die Ableitung

$$\frac{d}{dt}\big(f\,(x(t), y(t))\big)\Big|_{t=1}$$

der Funktion $t \mapsto f\,(x(t), y(t))$ im Punkt $t = 1$.

Lösung

Von der Funktion $y(t)$ kennen wir $y'(t) = e^{-t^2}$ und $y(1) = 42$.

Gemäss Kettenregel aus der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}f(x(t), y(t))}_{=2x(t)}\frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}f(x(t), y(t))}_{=2y(t)}\frac{dy}{dt}\\
&= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)\\
&= -2\pi\sin(\pi t)\cos(\pi t) + 2y(t)e^{-t^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \,|_{t=1} \;=\; -2\pi \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \cos(\pi) + 2 \underbrace{y(1)}_{=42} \cdot e^{-1}$$
$$= \frac{84}{e}$$

b) Gegeben sei die Gleichung

$$F(x,y) = \sqrt{x^2 + 2xy + y^4} - 3 = 0.$$

Fassen Sie die Koordinate y in der Umgebung des Punktes $P = (0, \sqrt{3})$ als Funktion von x auf, $y = \phi(x)$, und berechnen Sie die Ableitung $\phi'(0)$.

Lösung
Für Punkte $(x,y) = (x, \phi(x))$ gilt

$$F(x,y) = 0$$

und folglich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x,y) = 0.$$

Somit erhalten wir mit der Kettenregel

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=\phi'(x)} = 0.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2y}{\sqrt{x^2 + 2xy + y^4}} = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 2xy + y^4}},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 4y^3}{\sqrt{x^2 + 2xy + y^4}} = \frac{x + 2y^3}{\sqrt{x^2 + 2xy + y^4}}.$$

In Punkten (x,y) mit

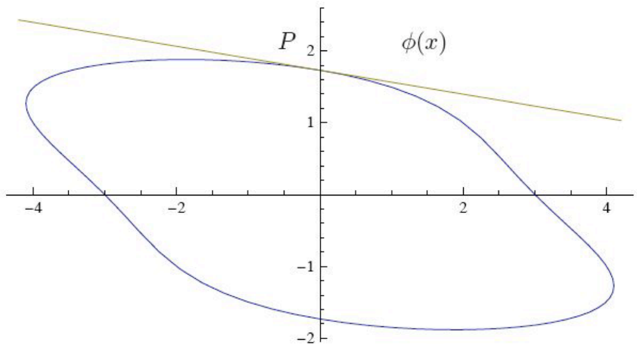
$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) \neq 0$$

folgt also aus dem Satz über implizite Funktionen

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy+y^4}}}{\frac{x+2y^3}{\sqrt{x^2+2xy+y^4}}} = -\frac{x+y}{x+2y^3}.$$

Für den Punkt $P = (0, \sqrt{3})$ ergibt sich schliesslich

$$\phi'(0) = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}^3} = -\frac{1}{6}.$$



4. Bestimmen Sie jeweils die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle P in Richtung v für die folgenden Beispiele.

a) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2$, $P = (3,3)$, $v = (-1,-3)^T$;

- **Lösung**

  $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix}$,

$$D_v f(P) = \nabla f(3,3) \cdot \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{48}{\sqrt{10}} \approx -15.18 \ .$$

- **Lösung**

  Achten Sie jeweils darauf, dass man den Vektor v normalisieren muss.

b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $P = (3,0)$, $v = (1,-1)^T$;

Lösung

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$,

$$D_v f(P) = \nabla f(3,0) \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.47 \ .$$

c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $P = (3,0,4)$, $v = (1,1,1)^T$.

Lösung

$$\nabla f(x,y,z) = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} D_v f(P) &= \nabla f(3,0,4) \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{125}\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{7}{\sqrt{3} \cdot 125} \approx -0.032 \,. \end{aligned}$$

5. a) Ein Berg sei beschrieben durch die Funktion

$$h(x,y) = 6000\, e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{y^2}{900}},$$

wobei die positive x-Achse nach Osten orientiert ist und die positive y-Achse nach Norden. In Position $(7, 6, h(7, 6))$ steht ein Mann. Wie gross ist die Steigung / das Gefälle, wenn der Mann seinen Standort Richtung Nordosten bzw. Westen verlässt?

Lösung

$$h_x(x,y) = -\frac{20}{3} x e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{y^2}{900}} \quad \Rightarrow \quad h_x(7,6) = -\frac{140}{3} e^{-\frac{49}{1800} - \frac{1}{25}}.$$

$$h_y(x,y) = -\frac{40}{3} y e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{y^2}{900}} \quad \Rightarrow \quad h_y(7,6) = -80 e^{-\frac{49}{1800} - \frac{1}{25}}.$$

Der Gradient in $(x, y) = (7, 6)$ ist also

$$\begin{pmatrix} h_x(7,6) \\ h_y(7,6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{140}{3} \\ -80 \end{pmatrix} e^{-\frac{49}{1800} - \frac{1}{25}} \,.$$

Richtung NO entspricht dem Einheitsvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\begin{aligned} D_{NO} h(7,6) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{49}{1800} - \frac{1}{25}} \begin{pmatrix} -\frac{140}{3} \\ -80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{49}{1800} - \frac{1}{25}} \left(-\frac{140}{3} \cdot 1 + (-80) \cdot 1 \right) \\ &\approx -83.74. \end{aligned}$$

Richtung Westen entspricht dem Einheitsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\begin{aligned} D_W h(7,6) &= e^{-\frac{49}{1800} - \frac{1}{25}} \begin{pmatrix} -\frac{140}{3} \\ -80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{140}{3} e^{-\frac{49}{1800} - \frac{1}{25}} \\ &\approx 43.63. \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Mann befindet sich also in einem sehr steilen Gelände. Der Winkel zur Horizontalen beträgt $-89.3°$ und $88.7°$.

b) Ein höhenkranker Wanderer befindet sich in Position $(1, 6)$. Der Wanderer folgt stets der Richtung des steilsten Abstiegs, um möglichst schnell Höhe zu verlieren. Zeigen Sie, dass die "Falllinie" des Wanderers durch die folgende Gleichung

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2}{x}$$

beschrieben ist. Eine solche Gleichung mit Ableitungen nennen wir Differenzialgleichung.

Lösung

Sei $r(t) = (x(t), y(t))^T$ die Falllinie. Der Wanderer folgt stets der Richtung des steilsten Abstiegs:

$$\dot{r}(t) \parallel \nabla h(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \nabla h(x,y) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} x e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{y^2}{900}} \\ -\frac{40}{3} y e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{y^2}{900}} \end{pmatrix} .$$

Lokal kann man die Falllinie als Funktion $y(x)$ auffassen, für welche gilt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{-\frac{40}{3} y e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{y^2}{900}}}{-\frac{20}{3} x e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{y^2}{900}}} .$$

Mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x)$ und $y = y(x)$ können wir das umschreiben und erhalten

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2}{x} .$$

c) Zeigen Sie, dass der Weg des Wanderers durch die Funktion $y(x) = 6x^2$ beschrieben wird.

Lösung

Wir zeigen also, dass $y(x) = 6x^2$ obige Differentialgleichung erfüllt. Es gilt $y'(x) = 12x$ und folglich

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{12x}{6x^2} = \frac{2}{x}.$$

Wir überprüfen noch den Startpunkt $y(1) = 6$.

d) Bestimmen Sie, wo der Wanderer eine Höhe von unter 4000 m erreicht. Für die numerische Lösung können Sie einen Taschenrechner mit Standardrechenoperationen verwenden.

Lösung

Die Höhe ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & h(x,y) = h(x, 6x^2) = 6000 e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{36x^4}{900}} = 4000 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{-x^2 - 72x^4}{1800} = \ln \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \quad & 72x^4 + x^2 + 1800 \cdot \ln \frac{2}{3} = 0. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $z = x^2$ erhalten wir die quadratische Gleichung

$$72z^2 + z + 1800 \cdot \ln \frac{2}{3} = 0,$$

welche die gerundeten Lösungen $z_1 \approx 3,18$ und $z_2 \approx -3.19$ besitzt. Aufgelöst nach x erhalten wir gerundet die vier Lösungen

$$x_1 \approx 1.78, \quad x_2 \approx -1.78, \quad x_3 \approx 1.78i, \quad x_4 \approx -1.78i.$$

Die komplexen Lösungen ergeben keinen Sinn. Die beiden reellen Lösungen entsprechen dem Schnitt der Falllinie mit der Höhenlinie $h = 4000$. Da der Wanderer bei $x_0 = 1$ startet, ist $\approx (1.78,\ 19.06)$ die gesuchte Lösung, der Weg nach $x_2 \approx -1.78$ führt über den Berggipfel auf die andere Seite.

e) Ein Wanderer befindet sich irgendwo im Nebel – auf einem Berg, dessen Höhenfunktion wir nicht kennen. Er möchte schnellstmöglich ins Tal. Alles, was er weiss, ist, dass der Weg Richtung Osten 25 % Steigung hat und Richtung Nordwesten 35 % Gefälle. In welche Richtung muss er gehen und wie steil ist es da?

Lösung

Darstellung der Himmelsrichtungen durch Einheitsvektoren:

Richtung Osten $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Richtung Nordwesten $\nwarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den Gradienten setzen wir $(A_1, A_2)^T$. Die Information, welche dem Wanderer im Nebel zur Verfügung steht, ist mathematisch formuliert das Skalarprodukt von Gradient und Einheitsrichtung, also

$$\begin{aligned} 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 &= +0.25 , \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot A_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot A_2 &= -0.35 . \end{aligned}$$

Für die Unbekannten A_1 und A_2 erhalten wir

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.25 , \\ A_2 &= -0.35 \cdot \sqrt{2} + 0.25 \approx -0.245 . \end{aligned}$$

Der Gradient am Standort des Wanderers ist also gerundet $\begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.245 \end{pmatrix}$.

Auf einem Kompass entspricht die Richtung des Gradienten ungefähr

$$90^\circ - \arctan\left(\frac{-0.245}{0.25}\right)^\circ \approx 134.42^\circ .$$

$\Rightarrow$ <u>Richtung des steilsten Abstiegs:</u> $\approx 314.42^\circ$ ($\approx$ Nordwesten). Das ist genau die entgegengesetzte Richtung des Gradienten.

Gefälle: Wir berechnen wiederum das Skalarprodukt von Gradient und Einheitsrichtung, also

$$\begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.245 \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.245 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.245 \end{pmatrix}\right|} = -\sqrt{0.25^2 + 0.245^2} \approx -0.35 \ .$$