Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

Serie 3

1. a) Zeigen Sie, dass der Graph von $f(x,y) = \sqrt{9-(x-2)^2-(y-3)^2}$ eine Halbkugel beschreibt und bestimmen Sie ihren Radius und ihr Zentrum.
Lösung

$$\begin{aligned} & z = f(x,y) = \sqrt{9-(x-2)^2-(y-3)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & z^2 = 9-(x-2)^2-(y-3)^2, z \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 9 = (x-2)^2+(y-3)^2+z^2, z \geq 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt eine Halbkugel mit Radius 3 und Zentrum $(2,3,0)$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene in $P = (3,1,f(3,1))$.
Lösung

$$z_0 = f(3,1) = \sqrt{9-1-4} = 2.$$

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ ist gegeben durch

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0 \ .$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} f_x(x_0,y_0) &= \frac{-2(x_0-2)}{2\sqrt{9-(x_0-2)^2-(y_0-3)^2}} = -\frac{1}{2} \\ f_y(x_0,y_0) &= \frac{-2(y_0-3)}{2\sqrt{9-(x-2)^2-(y-3)^2}} = 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Tangentialebenengleichung

$$-\tfrac{1}{2}(x-3) + (y-1) - (z-2) = 0,$$

beziehungsweise

$$-x + 2y - 2z + 5 = 0.$$

c) Beschreiben Sie die Niveaufläche $F(x,y,z) = 9$ für die Funktion $F(x,y,z) = x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 + 13$.
Lösung

$$\begin{aligned} & x^2-4x+y^2-6y+z^2+13 = 9 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^2+(y-3)^2+z^2 = 9. \end{aligned}$$

Die Niveaufläche $F(x,y,z) = 9$ beschreibt eine Kugel mit Radius 3 und Zentrum $(2,3,0)$.

d) Sei $Q = (3, 1, 2)$ ein Punkt auf der Niveaufläche aus **c)**. Bestimmen Sie die Tangentialebene in Q und vergleichen Sie Ihre Antwort mit **b)**. Was stellen Sie fest?
Lösung
Der Gradient steht senkrecht zur Niveaufläche. Folglich ist die Tangentialebene gegeben durch

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Für $Q = (3, 1, 2)$ folgt

$$\begin{aligned} (2x_0 - 4)(x - x_0) + (2y_0 - 6)(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad 2(x - 3) - 4(y - 1) + 4(z - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad -x + 2y - 2z + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Die Ebenen in b) und d) sind wie erwartet identisch.

2. Prüfungsaufgabe 6, Sommer 2012. Sei S die Fläche des Graphen von $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$.

a) Bestimmen Sie die Tangentialebene Σ zur Fläche S im Punkt $P = (0, 0, 10)$.
Lösung
Die Gleichung der Tangentialebene Σ zur Oberfläche S im Punkt $(0, 0, 10)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} -f_x(0, 0, 10)x - f_y(0, 0, 10)y + z &= 10 \\ 2x|_{x=y=0,z=10} \cdot x + 2y|_{x=y=0,z=10} \cdot y + z &= 10 \\ z &= 10 \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Graph von $f(x, y)$ ist ein nach unten geöffneten Paraboloid, der symmetrisch bzgl. der $z-$Achse liegt. Sein Maximum ist der Punkt $(0, 0, 10)$, deshalb ist die Tangentialebene an dieser Stelle horizontal.

b) Die Temperatur an der Stelle (x, y, z) ist gegeben durch

$$T(x, y, z) = x^2y + y^2z + 4x + 14y + z.$$

Wir befinden uns im Punkt P. In welche Richtung müssen wir uns auf der Fläche S bewegen, damit die Temperatur am schnellsten steigt?
Lösung
Der Gradient von der Temperatur im Punkt $(0, 0, 10)$ ist

$$\nabla T(x, y, z)|_{x=y=0,z=10} = \begin{pmatrix} 2xy + 4 \\ x^2 + 2yz + 14 \\ y^2 + 1 \end{pmatrix} |_{x=y=0,z=10} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

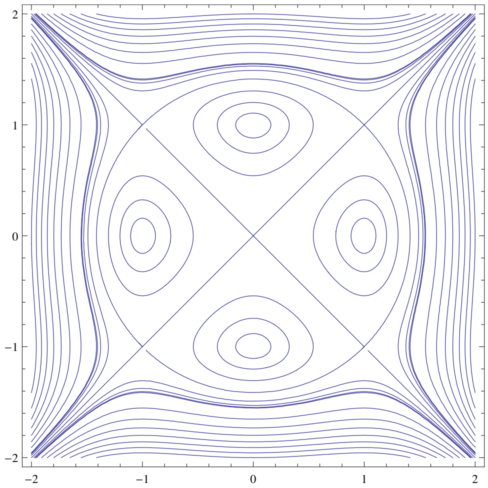
Die maximale Richtungsableitung von $T(x, y, z)$ auf Σ löst die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}\right] &= \frac{d}{dt}\left[4\cos t + 14 \sin t\right] = 0 \\ -4\sin t + 14\cos t &= 0 \\ t_1 = \arctan(\tfrac{7}{2}) \qquad \text{oder} \qquad t_2 &= \arctan(\tfrac{7}{2}) + \pi\ . \end{aligned}$$

Da die zweite Ableitung $-4\cos t - 14\sin t$ ist und $\cos(t_1), \sin(t_1) > 0$, $\cos(t_2), \sin(t_2) < 0$ ist, folgt, dass wir in t_1 ein Maximum (die zweite Ableitung ist negativ) und in t_2 ein Minimum (die zweite Ableitung ist positiv) haben.
Die Richtung in Σ, in welcher die Änderung von $T(x, y, z)$ maximal ist, ist somit $\frac{1}{\sqrt{53}}(2, 7, 0)$. (Dies entspricht der Richtung der Projektion von ∇T auf die Tangentialebene Σ.)

3. Das folgende Bild zeigt einige Niveaulinien der Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 - x^4 - 2y^2 + y^4$$



a) Lokalisieren Sie anhand des Bildes kritische Punkte (ohne Rechnung). Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um einen Sattelpunkt bzw. um ein Minimum/Maximum handelt. Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung

Die Punkte $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ und $(0, -1)$ sind jeweils von konzentrischen (ovalen) Höhenlinien umgeben. Unter der Annahme, dass die zu den Höhenlinien gehörigen Funktionswerte zum Zentrum hin zu- bzw. abnehmen, würde man dort ein Maximum bzw. Minimum erwarten.
In den Punkten $(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, -1)$ und $(-1, 1)$ kreuzen sich jeweils zwei Höhenlinien. Da die Richtungsableitung entlang einer Höhenlinie stets Null ist, muss das folgende Gleichungssystem im Schnittpunkt gelten:

$$f_x u_1 + f_y u_2 = 0,$$
$$f_x v_1 + f_y v_2 = 0,$$

für die linear unabhängigen Vektoren $u = \binom{u_1}{u_2}$ und $v = \binom{v_1}{v_2}$ in Richtung der Höhenlinien. Man lässt sich leicht davon überzeugen, dass dieses nur die Lösung $f_x = f_y = 0$ besitzt und damit in den Kreuzungspunkten $\nabla f = 0$ gelten muss, d.h. alle Kreuzungspunkte sind mit Sicherheit kritische Punkte! Intuitiv würde man erwarten, dass es sich bei ihnen um Sattelpunkte handelt. Mit Gewissheit sagen können wir das jedoch nicht!

Beispiel: Die Funktion $g(x,y) = (x-y)^2(x+y)^2$ weist zwei sich im Punkt $(0,0)$ schneidende Höhenlinien auf, nämlich $y = x$ und $y = -x$. Der Punkt $(0,0)$ ist aber kein Sattelpunkt, sondern vielmehr ein Minimum, denn es gilt offensichtlich $g(0,0) = 0$ und $g(x,y) \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Untersuchen Sie sämtliche kritischen Punkte rechnerisch. Entscheiden Sie jeweils anhand der zweiten Ableitungen von f, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

Lösung

Der Gradient lautet

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - 4x^3 \\ -4y + 4y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x(1-x^2) \\ -4y(1-y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x(1-x)(1+x) \\ -4y(1-y)(1+y) \end{pmatrix}.$$

Wir haben also $\nabla f = 0$ genau dann, wenn $x, y \in \{-1, 0, 1\}$.

Die kritischen Punkte sind also

$P_1 = (-1,-1)$, $P_2 = (-1,0)$, $P_3 = (-1,1)$,
$P_4 = (0,-1)$, $P_5 = (0,0)$, $P_6 = (0,1)$,
$P_7 = (1,-1)$, $P_8 = (1,0)$, $P_9 = (1,1)$,

wie wir dies schon in Teil a) gesehen haben.

Die zweiten Ableitungen sind

$$f_{xx}(x,y) = 4 - 12x^2$$
$$f_{xy}(x,y) = 0$$
$$f_{yy}(x,y) = -4 + 12y^2$$

Wir benutzen nun das Kriterium für kritische Punkte aus der Vorlesung:

$$D = f_{xy}^2 - f_{xx} \cdot f_{yy} = 16 - 48(x^2 + y^2) + 144x^2y^2.$$

$P_1 : D = 64 > 0$		$\Rightarrow$	Sattelpunkt
$P_2 : D = -32 < 0,$	$f_{xx}(-1,0) = -8 < 0$	$\Rightarrow$	Maximum
$P_3 : D = 64 > 0$		$\Rightarrow$	Sattelpunkt
$P_4 : D = -32 < 0,$	$f_{xx}(0,-1) = 4 > 0$	$\Rightarrow$	Minimum
$P_5 : D = 16 > 0$		$\Rightarrow$	Sattelpunkt
$P_6 : D = -32 < 0,$	$f_{xx}(0,1) = 4 > 0$	$\Rightarrow$	Minimum
$P_7 : D = 64 > 0$		$\Rightarrow$	Sattelpunkt
$P_8 : D = -32 < 0,$	$f_{xx}(1,0) = -8 < 0$	$\Rightarrow$	Maximum
$P_9 : D = 64 > 0$		$\Rightarrow$	Sattelpunkt

c) Untersuchen Sie die Funktion

$$g(x,y) = e^{4y - x^2 - y^2}$$

auf Minima, Maxima und Sattelpunkte.

Lösung

Erste Ableitungen:

$$g_x(x,y) = -2xe^{4y-x^2-y^2}$$

$g_y(x,y) = (4-2y)e^{4y-x^2-y^2}$

Der einzige kritische Punkt ist bei $(0,2)$. (Dort ist $\nabla g = 0$.)

Zweite Ableitungen:

$$\begin{aligned}
g_{xx}(x,y) &= -2e^{4y-x^2-y^2} + 4x^2 e^{4y-x^2-y^2} && \Rightarrow \quad g_{xx}(0,2) = -2e^4 \\
g_{xy}(x,y) &= -2x(4-2y)e^{4y-x^2-y^2} && \Rightarrow \quad g_{xy}(0,2) = 0 \\
g_{yy}(x,y) &= -2e^{4y-x^2-y^2} + (4-2y)^2 e^{4y-x^2-y^2} && \Rightarrow \quad g_{yy}(0,2) = -2e^4
\end{aligned}$$

Es folgt

$$D = g_{xy}^2(0,2) - g_{xx}(0,2)g_{yy}(0,2) = -4e^8.$$

Also haben wir $D < 0$, $g_{xx}(0,2) < 0 \Rightarrow$ Maximum.

4. *(Zwei Berge ohne Sattel.)*

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion zwei lokale Maximas besitzen, jedoch keine weiteren kritische Punkte.

$$f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2-e^y)^2.$$

Skizzieren Sie den Graphen.

Lösung

Wir bestimmen zuerst alle kritischen Punkte.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2(x^2-1)\cdot 2x - 2(x^2-e^y)\cdot 2x \\ 2(x^2-e^y)\cdot e^y \end{pmatrix} = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x^2 = e^y$, da $e^y > 0$, und somit auch $x \neq 0$. Eingesetzt in der ersten Gleichung erhalten wir zusätzlich $x^2 = 1$. Die kritischen Punkte sind also $(x,y) = (\pm 1, 0)$.

Um zu zeigen, dass diese beiden Punkte lokale Maxima sind, betrachten wir die Hessematrix

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24x^2 + 4 + 4e^y & 4xe^y \\ 4xe^y & 2(x^2-2e^y)e^y \end{pmatrix}.$$

Das heisst

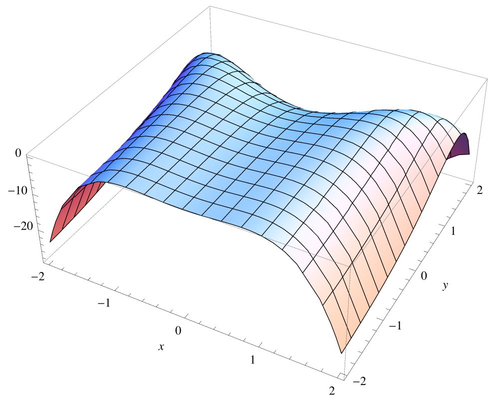
$$\mathrm{H}_f(1,0) = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen gilt $D = -f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2 = -16 < 0$ und $f_{xx} = -16 < 0$. Also handelt es sich in jeweils um ein Maximum.

Die folgende Skizze zeigt den Graphen der Funktion.

5. Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = 4 + x^4 + 3y^4.$$



a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.
Lösung

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 12y^3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

b) Berechnen Sie die Hessematrix in diesen Punkten. Können Sie damit die Art der kritischen Punkte folgern?
Lösung

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 36y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich können wir daraus keine Schlüsse bezüglich der Art der Nullstelle ziehen.

c) Charakterisieren Sie die kritischen Punkte.
Lösung
In diesem Fall können wir jedoch auf einfache Art und Weise zeigen, dass die Funktion f im Punkt $(0,0)$ ein (globales) Minimum hat. Es gilt

$$f(x,y) = 4 + x^4 + 3y^4 \geq 4 = f(0,0),$$

da $x^4 \geq 0$ und $y^4 \geq 0$.

6. Bestimmen Sie drei Zahlen mit der Summe 9, für welche die Summe der Quadrate minimal ist. Interpretieren Sie dieses Resultat geometrisch.

Lösung
Durch die Nebenbedingung erhalten wir $z = 9 - x - y$. Gesucht ist also ein Minimum der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (9 - x - y)^2.$$

Dazu berechnen wir den Gradienten

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x + 2y - 18 \\ 2x + 4y - 18 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also $\nabla f = 0$ falls $(x, y) = (3, 3)$. Für die Hessematrix gilt

$$\mathrm{H}_f = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $D = f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} = -12 < 0$ und $f_{xx} = 4 > 0$. Wir haben daher ein Minimum in $(x, y) = (3, 3)$.

Das gesuchte Zahlentrippel ist also $(3, 3, 3)$. Dies entspricht dem Punkt in der Ebene $x + y + z = 9$ mit minimalem euklidischem Abstand zum Ursprung $(g(x, y, z) = \|(x, y, z)\|^2)$.