Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

Serie 5

1. Bei den folgenden Integralen ist die Reihenfolge der Integrationen umzukehren: Die innere Variable soll zur äusseren werden und umgekehrt. Wie lautet jeweils das neue Integral? Skizzieren Sie das Integrationsgebiet! Berechnen Sie das Integral in c) und d).

a) $\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Lösung

Das innere Integral läuft über die Variable x. Die Integrationsgrenzen hängen von y ab:

- untere Grenze $x = \varphi(y) = y^3$
- obere Grenze $x = \psi(y) = 4\sqrt{2y}$

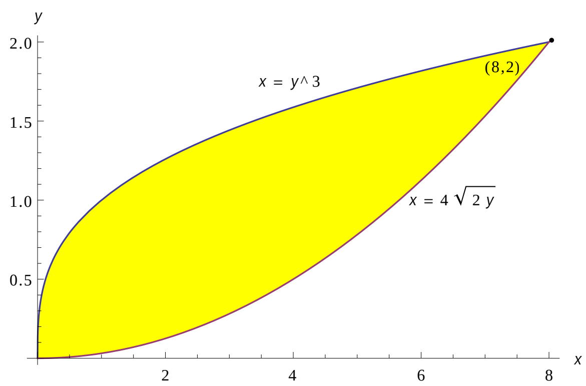


Figure 1: 1.a)

Beachte, dass sich die beiden Kurven in den Punkten $(0,0)$ und $(8,2)$ schneiden (Löse die Gleichung $y^3 = 4\sqrt{2y}$)!
Vertauscht man die Reihenfolge der Integration, so läuft die äussere Variable x von 0 bis 8. Zur unteren Integrationsgrenze für das innere Integral über y wird die Kurve $x = 4\sqrt{2y}$ (siehe Abbildung 1), was äquivalent zu $y = \frac{1}{32}x^2$ ist. Die obere Grenze $x = y^3$ ist ebenso äqivalent zu $y = \sqrt[3]{x}$. Also:

$$\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^8 \int_{\frac{1}{32}x^2}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

b) $\int_{-1}^2 \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Lösung

Das innere Integral läuft über die Variable y. Seine Integrationsgrenzen hängen von x ab:

- untere Grenze $y = \varphi(x) = -x$

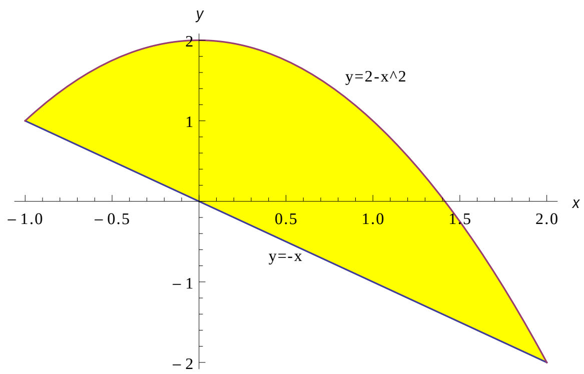


Figure 2: 1.b)

- obere Grenze $\;y = \psi(x) = 2 - x^2$

Beachte, dass ψ nicht monoton ist und wir daher die neuen Schranken nicht direkt durch die Umkehrabbildungen von φ und ψ erhalten. In Abbildung 2 sehen wir, dass wir das Integral als Summe zweier Teilintegrale schreiben können und mit $y \leq 2 - x^2 \Leftrightarrow -\sqrt{2-y} \leq x \leq \sqrt{2-y}$ erhalten wir:

$$\int_{-1}^{2} \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_{-2}^{1} \int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{1}^{2} \int_{-\sqrt{2-y}}^{+\sqrt{2-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

c) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Lösung

Das innere Integral läuft über die Variable x. Die Integrationsgrenzen hängen von y ab:

- untere Grenze $x = \varphi(y) = 3y$
- obere Grenze $\;x = \psi(y) = 3$

Mit $x = 3y \Leftrightarrow y = \frac{x}{3}$ erkennen wir aus Abbildung 3:

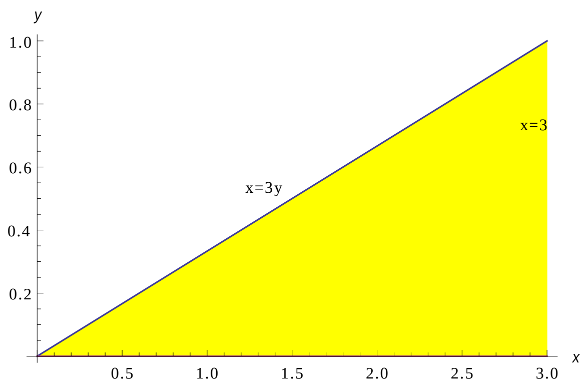


Figure 3: 1.c)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^3\int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left[e^{x^2}\cdot y\right]_{y=0}^{\frac{1}{3}x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 e^{x^2}\cdot\frac{1}{3}x\,\mathrm{d}x \quad = \frac{1}{6}\int_0^3 e^{x^2}\cdot 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{6}e^{x^2}\right]_{x=0}^3 \qquad = \frac{1}{6}\left(e^9-1\right).\end{aligned}$$

d) $\int_0^1\int_{x^2}^1 x^3\sin y^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Lösung

Das innere Integral läuft über die Variable y. Die Integrationsgrenzen hängen von x ab:

- untere Grenze $y = \varphi(x) = x^2$
- obere Grenze $y = \psi(x) = 1$

Mit $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ für $x \geq 0$ erkennen wir aus Abbildung 4:

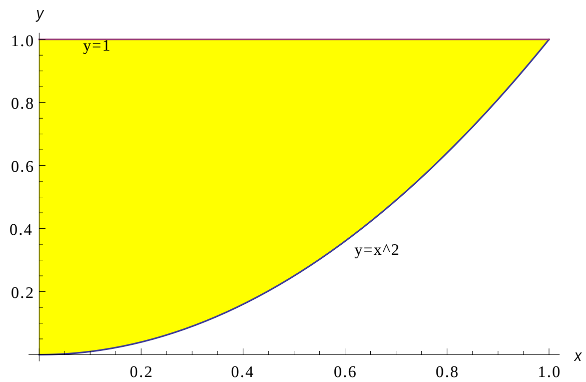


Figure 4: 1.d)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{x^2}^1 x^3\sin y^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} x^3\sin y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{\sqrt{y}}\sin y^3\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 3\,y^2\,\sin y^3\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{12}\left[\cos y^3\right]_{y=0}^1 = \frac{1}{12}(1-\cos 1).\end{aligned}$$

2. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale. Die Reihenfolge der Integration ist dabei passend zu wählen.

a) $\iint_R y^3\sin(xy^2)\,\mathrm{d}A, \quad R = \left\{(x,y)\in^2 \;|\, 0\leq x\leq 2,\, 0\leq y\leq \frac{\pi}{2}\right\}$

Lösung
Nach x können wir ohne Probleme integrieren:

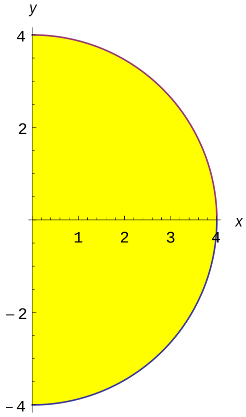
$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 y^3 \sin(xy^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 y \cdot \left(y^2 \sin(xy^2)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cdot \left(-\cos(xy^2)\right)\Big|_{x=0}^{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y - y\cos(2y^2))\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,\mathrm{d}y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos(2y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,\mathrm{d}y - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4y\cos(2y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}y^2\Big|_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin(2y^2)\Big|_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi^2}{2}\right) \approx 1.4775.
\end{aligned}$$

b) $\iint_R x^4 y^5 e^{x^5 y^3}\,\mathrm{d}A, \quad R = \left\{(x,y) \in^2 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\right\}$
Lösung
Nach x können wir ohne Probleme integrieren:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 x^4 y^5 e^{x^5 y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{5}\int_0^1 \int_0^2 y^2 \cdot (5x^4 y^3 e^{x^5 y^3})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{5}\int_0^1 y^2 \cdot (e^{x^5 y^3})\Big|_{x=0}^{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{5}\int_0^1 (y^2 e^{32y^3} - y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{5}\int_0^1 y^2 e^{32y^3}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{5}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{96}\int_0^1 96y^2 e^{32y^3}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\,y^3\Big|_{y=0}^{1} \\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{96}\,e^{32y^3}\Big|_{y=0}^{1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\,y^3\Big|_{y=0}^{1} \\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{96}(e^{32}-1) - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{480}(e^{32}-33) \\
&\approx 1.6451 \times 10^{11}.
\end{aligned}$$

c) $\iint_R x^2 y\,\mathrm{d}A, \quad R = \{(x,y) \in^2 \mid (x,y)$ liegt im Gebiet des ersten und vierten Quadranten, welches durch den Halbkreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 4 beschränkt wird$\}$

Lösung
Das Integrationsgebiet ist oben skizziert. Wir können zuerst nach x oder nach y



integrieren, beide Wege sind vom Aufwand her gleichwertig. Wir wollen an dieser Stelle zuerst nach y integrieren.

Während x von 0 bis 4 läuft, läuft y vom unteren Rand zum oberen Rand. Die Punkte auf dem Halbkreis erfüllen die Gleichung $\sqrt{x^2+y^2}=4$, der untere Rand ist somit durch $y=-\sqrt{16-x^2}$ gegeben, der obere Rand durch $y=\sqrt{16-x^2}$. Also:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} x^2 y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} x^2(2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^4 x^2 \left[y^2\right]_{y=-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^4 x^2(16-x^2-16+x^2)\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

Das können wir auch grafisch einsehen: Die Funktion $f(x,y)=x^2y$ erfüllt $f(x,-y)=-f(x,y)$ und da das Integrationsgebiet symmetrisch bezüglich der x-Achse ist, heben sich die Funktionswerte von f von oberhalb und unterhalb der $x-$Achse gegenseitig weg, siehe Abbildung **??** rechts. Das ist völlig analog zum eindimensionalen Fall.

d) $\iint_R (x+y)\,\mathrm{d}A, \quad R=\left\{(x,y)\in^2 \mid |x|\le y\le 4\right\}$

Lösung
Der obere Rand des Integrationsgebiets ist gegeben durch $y=4$, der untere Rand durch $y=|x|$, also durch $y=x$, $x\ge 0$ und $y=-x$, $x<0$. Wir integrieren zuerst nach x und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_{-y}^{y} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)\Big|_{x=-y}^{y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 2y^2\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}y^3\Big|_{y=0}^{4} = \frac{128}{3} \approx 42.667.
\end{aligned}$$

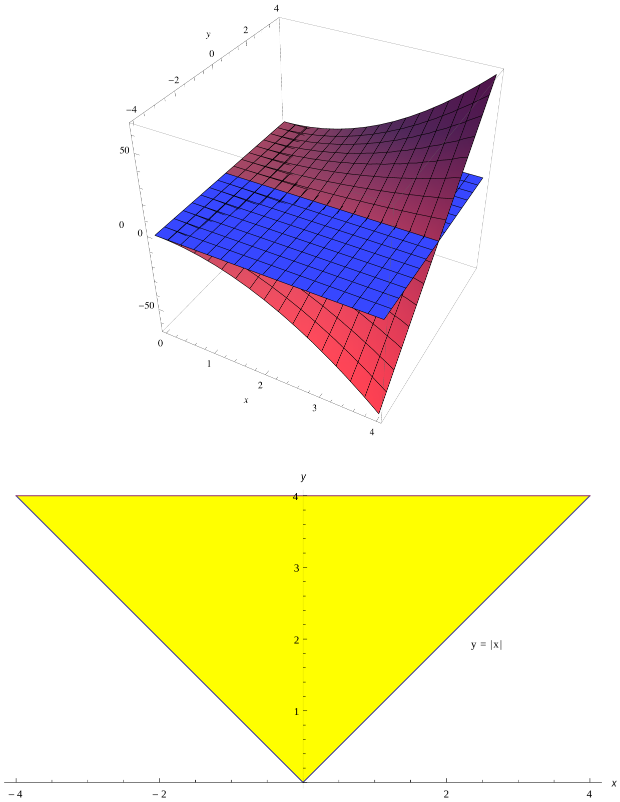
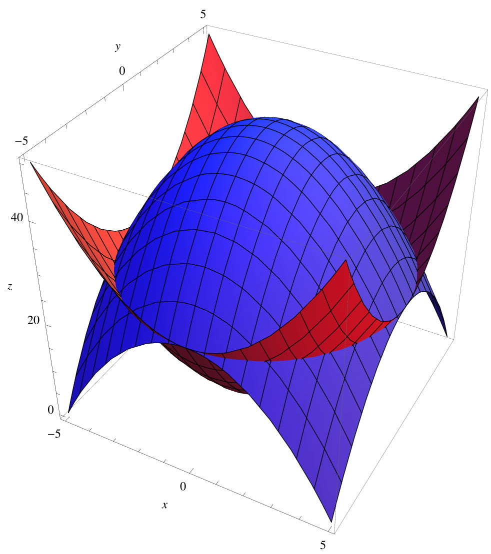


Figure 5: 2.d)

3. Berechnen Sie das Volumen zwischen den beiden Paraboloiden $z = x^2 + y^2$ (rot) und $z = 50 - x^2 - y^2$ (blau).



Lösung

Wir setzen die Gleichungen ineinander ein und formen um:

$$\begin{aligned} & 50 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 50 = 2x^2 + 2y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 25 = x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Der Schnitt der beiden Flächen ist also der Kreis K mir Radius 5 und Mittelpunkt $(0, 0, 25)$ in der Ebene $z = 25$. Das Volumen zwischen den beiden Funktionen $g(x, y) = 50 - x^2 - y^2$ und $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist also das Integral über die Kreisscheibe D mit Rand K der Funktion $g(x, y) - f(x, y)$. Diese Scheibe parametrisieren wir am besten mit Polarkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned} \iint_D (g(x,y) - f(x,y))\, \mathrm{d}A &= 2 \iint_D (25 - x^2 - y^2)\, \mathrm{d}A \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^5 (25 - r^2) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \\ &= 4\pi \left[25\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^5 \\ &= \pi(2 \cdot 5^4 - 5^4) \quad = \quad 625\pi \approx 1963.5. \end{aligned}$$

4. Benutzen Sie ein Doppelintegral um die Fläche des Gebietes zwischen $y = 1 + \sin x$ und $y = 1 - \sin x$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ zu berechnen. Skizzieren Sie das Gebiet!

Lösung

Die Skizze ist in Abbildung 6 zu sehen. Wir bezeichnen das Gebiet im Folgenden als

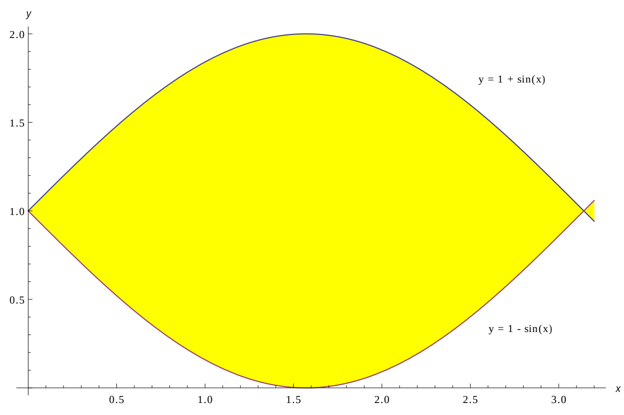


Figure 6: Aufgabe 4

K und die Fläche als F. Der Schnitt der Kurven $y = 1 + \sin x$ und $y = 1 - \sin x$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & 1+\sin x = 1-\sin x \\ \Leftrightarrow\ & 2\sin x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin x = 0, \end{aligned}$$

das entspicht allen Punkten $x_k = \pi \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere haben wir Schnittpunkte an den Randpunkten des Intervalls $[0, \pi]$.

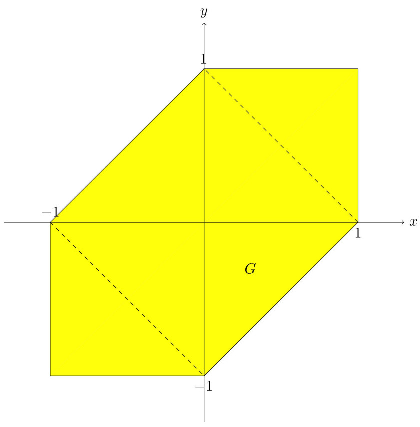
Wenn x von 0 bis π läuft, so läuft y von $1-\sin x$ nach $1+\sin x$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} F &= \iint_K 1 \, \mathrm{d}A = \int_0^\pi \int_{1-\sin x}^{1+\sin x} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi ((1+\sin x) - (1-\sin x)) \, \mathrm{d}x \\ &= 2 \int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x \\ &= 2\,(-\cos x)|_{x=0}^{\pi} = 2(1+1) = 4. \end{aligned}$$

5. Prüfungsaufgabe 9, Sommer 2012. Eine elektrische Ladung ist gemäss Ladungsdichte

$$\sigma(x,y) = xy(x^2+y^2)$$

über das Gebiet G (siehe Abbildung) verteilt. Die Einheit von σ ist Coulomb pro Quadratmeter: $\frac{C}{m^2}$. Berechnen Sie die Gesamtladung des Gebiets G.



Lösung

Die Gesamtladung des Gebiets G ist gegeben durch

$$\iint_G \sigma(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \ .$$

Da für die Ladungsdichte folgende Eigenschaften gelten

$$\begin{aligned}
\sigma(-x,y) &= -\sigma(x,y)\ , \\
\sigma(x,-y) &= -\sigma(x,y)\ , \\
\sigma(-x,-y) &= \sigma(x,y)\ ,
\end{aligned}$$

folgt nun

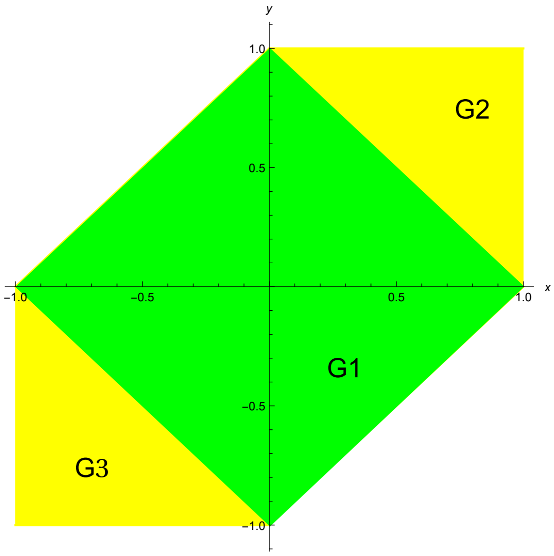
$$\begin{aligned}
\iint_G \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \underbrace{\iint_{G_1} \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{=0} + \iint_{G_2} \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{G_3} \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 2\iint_{G_2} \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 \int_{-x+1}^1 xy(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \left[x^3\frac{y^2}{2} + x\frac{y^4}{4}\right]_{y=-x+1}^1 \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \left[\frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^4}{4}\right] \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \left[\frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{2} + x^4 - \frac{x^5}{2} - \frac{x^5}{4} + x^4 - \frac{3x^3}{2} + x^2 - \frac{x}{4}\right] dx \\
&= 2\int_0^1 \left[-\frac{3}{4}x^5 + 2x^4 - \frac{3}{2}x^3 + x^2\right] \mathrm{d}x \\
&= 2\left[-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{5} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right] \\
&= 2\cdot\frac{7}{30} = \frac{7}{15}\ .
\end{aligned}$$

Die Gesamtladung beträgt also $\frac{7}{15}\ C$.

6. **Prüfungsaufgabe 5, Sommer 2015.** Bestimmen Sie den Schwerpunkt der homogenen Fläche rechts von der Geraden $x = 2$, welche durch den Kreis $x^2 + y^2 = 16$ begrenzt wird.

Lösung
Wir berechnen zuerst mit Hilfe der Substitution $x = 4\sin t$ die Masse

$$\begin{aligned}
m = 2\int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 16\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\ \mathrm{d}t = 16\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 16\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}.
\end{aligned}$$



Dann gilt

$$
\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{m}\int_2^4 2x\sqrt{16-x^2} = \frac{1}{m}\left[-\frac{2}{3}\left(16-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 \\
&= \frac{1}{m}\frac{2}{3}\,(12)^{\frac{3}{2}} = \frac{16\sqrt{3}}{\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{4\pi-3\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Zudem gilt aus Symmetriegründen $y_S = 0$ und der Schwerpunkt ist gegeben durch

$$
S = \left(\frac{12\sqrt{3}}{4\pi-3\sqrt{3}}, 0\right).
$$