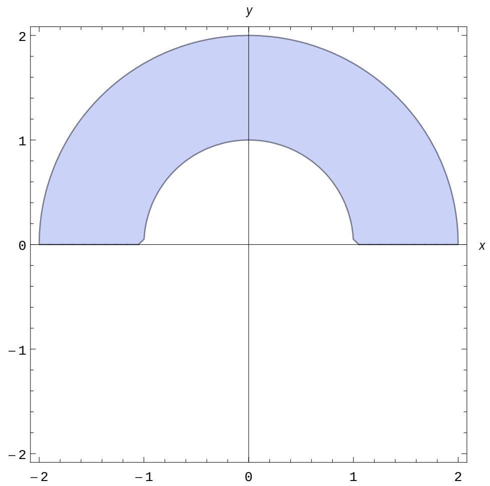
Serie 7

1. Prüfungsaufgabe 6, Sommer 2014. Gegeben sei das Gebiet

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r_0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2,\, y \geq 0 \right\}$$

mit konstanter Dichte $\rho \equiv 1$.

a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von G für $r_0 = 1$.
Lösung



In Polarkoordinaten ist G parametrisiert durch

$$G = \{(r, \phi) \in [0, \infty) \times (-\pi, \pi] \,|\, r_0 \leq r \leq 2,\, 0 \leq \phi \leq \pi\}\,.$$

Zunächst berechnen wir die Masse für $r_0 = 1$:

$$M = \int_1^2 \int_0^\pi r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\, r^2\big|_1^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Aus Symmetriegründen ist weiter klar, dass die x-Koordinate des Schwerpunkts $x_S = 0$ erfüllt. Für die y-Koordinate rechnen wir

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi y \cdot r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi r^2 \sin\phi \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r = \frac{1}{M} \int_1^2 \left(-r^2 \cos\phi\right)\big|_{\phi=0}^{\pi} \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{M} \int_1^2 2r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{1}{M}\frac{2}{3}\, r^3\big|_{r=1}^2 = \frac{1}{M}\frac{2}{3}(8-1) = \frac{1}{M}\frac{14}{3} \\ &= \frac{28}{9\pi}. \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt lautet somit $(x_S, y_S) = (0, \frac{28}{9\pi})$.

b) Sei $r_0 \in (0,2)$ der grösste Wert, so dass der Schwerpunkt von G in G liegt. Finden Sie eine quadratische Gleichung $r_0^2 + pr_0 + q = 0$ zur Bestimmung von r_0.

Lösung

Zunächst berechnen wir die Masse von G:

$$M = \int_{r_0}^{2} \int_{0}^{\pi} r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \, r^2 \Big|_{r_0}^{2} = \frac{\pi}{2}(4 - r_0^2).$$

Aus Symmetriegründen ist weiter klar, dass die x-Koordinate des Schwerpunkts $x_S = 0$ erfüllt. Für die y-Koordinate rechnen wir

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{M} \int_{r_0}^{2} \int_{0}^{\pi} y \cdot r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r = \frac{1}{M} \int_{r_0}^{2} \int_{0}^{\pi} r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{M} \int_{r_0}^{2} (-r^2 \cos\phi)\Big|_{\phi=0}^{\pi} \, \mathrm{d}r = \frac{1}{M} \int_{r_0}^{2} 2r^2 \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{M} \frac{2}{3} \, r^3 \Big|_{r=r_0}^{2} = \frac{1}{M} \frac{2}{3}(8 - r_0^3) = \frac{4(8 - r_0^3)}{3\pi(4 - r_0^2)}. \end{aligned}$$

Damit der Schwerpunkt von G in G liegt, muss $y_S \geq r_0$ gelten, also

$$\begin{aligned} & \frac{4(8 - r_0^3)}{3\pi(4 - r_0^2)} \geq r_0 \\ \Leftrightarrow \; & \frac{4(2 - r_0)(4 + 2r_0 + r_0^2)}{3\pi(2 - r_0)(2 + r_0)} \geq r_0 \\ \Leftrightarrow \; & \frac{4(4 + 2r_0 + r_0^2)}{3\pi(2 + r_0)} \geq r_0 \\ \Leftrightarrow \; & 4(4 + 2r_0 + r_0^2) \geq r_0(3\pi(2 + r_0)) \\ \Leftrightarrow \; & 16 + 8r_0 + 4r_0^2 \geq 3\pi r_0^2 + 6\pi r_0 \\ \Leftrightarrow \; & 16 + (8 - 6\pi)r_0 + (4 - 3\pi)r_0^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \; & r_0^2 + 2r_0 + \frac{16}{4 - 3\pi} \leq 0. \end{aligned}$$

Bei der ersten Umformung beachte, dass $r_0 = 2$ sowohl eine Nullstelle vom Zähler als auch vom Nenner des Bruches ist. Das grösste $r_0 \in (0,2)$, welches diese Ungleichung erfüllt, muss also auch die Gleichung erfüllen:

$$r_0^2 + 2r_0 + \frac{16}{4 - 3\pi} = 0.$$

c) Bestimmen Sie r_0.

Lösung

Die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$r_0^2 + 2r_0 + \frac{16}{4 - 3\pi} = 0$$

lauten

$$r_0 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + \frac{64}{3\pi-4}}}{2} = -1 \pm \sqrt{\frac{3\pi + 12}{3\pi - 4}}.$$

Da nur eine der beiden Lösungen positiv ist, können wir die korrekte Lösung

$$r_0 = -1 + \sqrt{\frac{3\pi + 12}{3\pi - 4}} \qquad (\approx 0.987)$$

direkt ablesen.

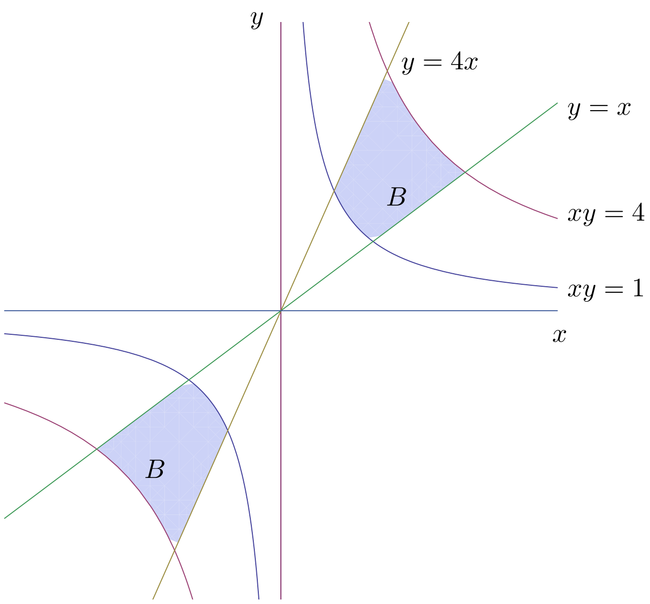
2. Gegeben sei der Bereich B, welcher von den Hyperbeln $xy = 1$ und $xy = 4$ sowie den Linien $\frac{y}{x} = 1$ und $\frac{y}{x} = 3$ begrenzt wird. Bestimmen Sie

$$\iint_B f(x, y)\,\mathrm{d}A$$

und skizzieren Sie den Bereich B vor und nach der Koordinatentransformation.

a) $f(x, y) = e^{xy}$ und

- **Lösung**
  Das Gebiet B sieht folgendermassen aus.



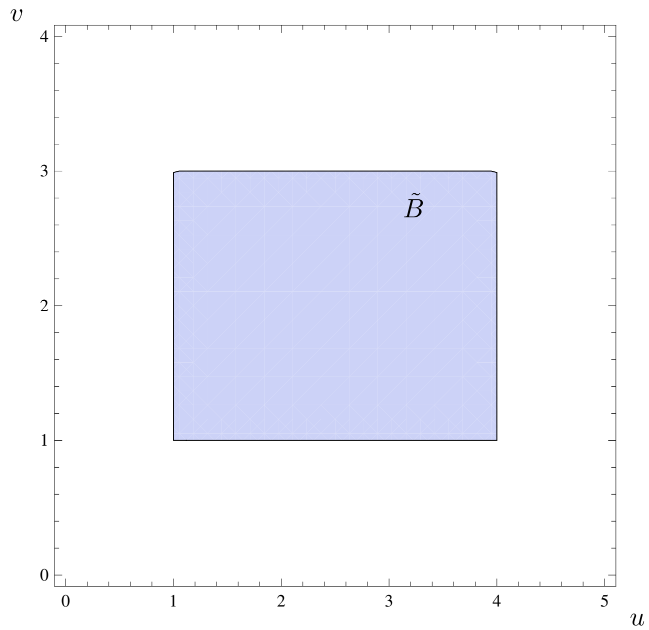
Da die Funktionen und das Gebiet symmetrich zum Ursprung sind, können wir uns vorerst auf den Bereich im ersten Quadranten beschränken. Wir wollen diesen nun durch ein Rechteck parametrisieren und wählen daher die Koordinatentransformation

$$u = xy, \qquad\qquad v = \frac{y}{x}.$$

Dann gilt

$$uv = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{uv}, \qquad\qquad \frac{u}{v} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}.$$

und für die Schranken $1 \leq u \leq 4$ und $1 \leq v \leq 3$.



Für die Jacobi-Determinante erhalten wir

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{v}}{u^{3/2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{v} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{2v}.$$

Somit können wir die beiden Integrale berechnen:

- **Lösung**

$$\iint\limits_B e^{xy}\,\mathrm{d}A = 2 \cdot \int\limits_1^3 \int\limits_1^4 e^u \,\frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int\limits_1^3 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v \cdot \int\limits_1^4 e^u\,\mathrm{d}u$$

$$= [\ln|v|]_1^3 \cdot [e^u]_1^4 = \ln 3 \cdot (e^4 - e),$$

b) $f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}$.
Lösung

$$\iint\limits_B \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) \mathrm{d}A = 2 \cdot \int\limits_1^3 \int\limits_1^4 \left(\sqrt{v} + \sqrt{u}\right) \frac{1}{2v} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int\limits_1^3 \left[\frac{1}{\sqrt{v}} u + \frac{1}{v}\frac{2}{3} u^{3/2}\right]_1^4 \mathrm{d}v = \int\limits_1^3 \left(\frac{3}{\sqrt{v}} + \frac{14}{3}\frac{1}{v}\right) \mathrm{d}v$$

$$= \left[6\sqrt{v} + \frac{14}{3} \ln|v|\right]_1^3 = 6(\sqrt{3} - 1) + \frac{14}{3} \ln 3.$$

3. Eine dünne Platte P mit konstanter Dichte $\rho(x, y) = 1$ liegt in der xy-Ebene und ist dort von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit $a, b > 0$ berandet. Berechnen Sie das polare Trägheitsmoment der Platte.

Lösung

Wir verwenden folgende Koordinatentransformation, auch bekannt als elliptische Koordinaten:

$$x = ar \cos\phi\ ,\ \ y = br \sin\phi.$$

Dann ist die Platte gegeben durch $0 \le r \le 1$ und $-\pi \le \phi \le \pi$.

Wir berechnen die Jacobi-Determinante.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\phi & -ar\sin\phi \\ b\sin\phi & br\cos\phi \end{vmatrix}$$

$$= abr\cos^2\phi + abr\sin^2\phi = abr.$$

Der quadratische Abstand zum Mittelpunkt ist gegeben durch

$$x^2 + y^2 = a^2r^2\cos^2\phi + b^2r^2\sin^2\phi$$

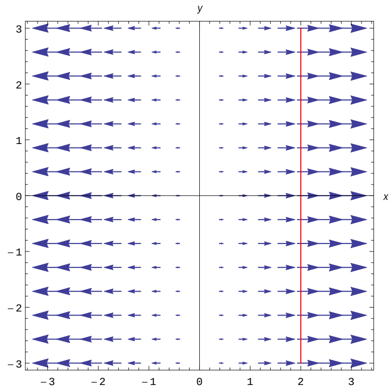
und foglich ist das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
\Theta &= \iint_P \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} abr^3(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r \\
&= ab\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^1 \left(a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi + b^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi\right) \\
&= \frac{ab}{4}(a^2\pi + b^2\pi) = \frac{ab(a^2 + b^2)\pi}{4}.
\end{aligned}$$

4. Finden Sie jeweils ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ im $\mathbb{R}^2$, welches die folgenden Bedingungen erfüllt. Die Lösungen sind dabei nicht eindeutig. Fertigen Sie jeweils auch eine Skizze an!

a) $\mathbf{F}$ ist überall senkrecht zur Geraden $x = 2$.

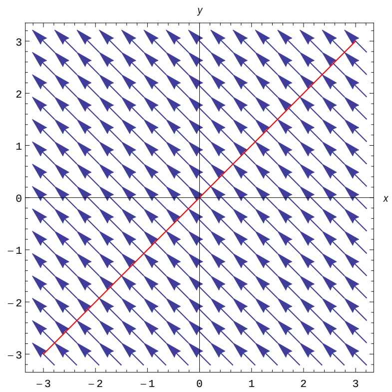
Lösung



Für $x = 2$ muss $\mathbf{F}$ horizontal sein. Da wir ansonsten keine weiteren Einschränkungen erfüllen müssen, können wir $\mathbf{F} = (x, 0)$ wählen (Abbildung a)). Weitere mögliche Lösungen wären $\mathbf{F} = (a, 0)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $\mathbf{F}$ ist überall senkrecht zur Geraden $x = y$.

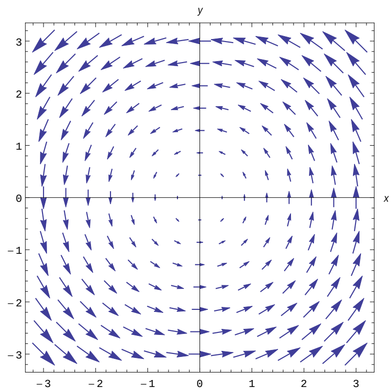
Lösung



Die Gerade $x = y$ hat Steigung 1, während der Vektor $(-1, 1)$ Steigung -1 hat. Damit können wir $\mathbf{F} = (-1, 1)$ wählen (Abbildung b)). Eine weitere mögliche Lösung wäre $\mathbf{F} = (-y, x)$ oder alle bisher genannten Lösungen mit negativem Vorzeichen.

c) $\mathbf{F}$ fliesst im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung und nimmt betragsmässig mit dem Abstand zum Ursprung zu.

Lösung



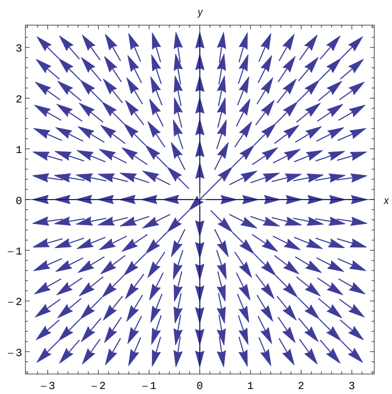
Das Vektorfeld $\mathbf{F} = (-y, x)$ (Abbildung c)) erfüllt alle geforderten Bedingungen. Für den Betrag von $\mathbf{F}$ gilt

$$|\mathbf{F}| = |(-y, x)| = \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)|,$$

also ist der Betrag gleich gross wie der Abstand zum Ursprung und nimmt folglich mit diesem zu. Weiter steht der Vektor $(-y, x)$ auch senkrecht auf dem Vektor (x, y), für alle $x, y \in \mathbb{R}$, das heisst senkrecht zur radialen Richtung. Damit ist klar, dass sich $\mathbf{F} = (-y, x)$ in Kreisbahnen um den Ursprung dreht und durch Einsetzen eines beliebigen Punktes sehen wir, dass die Drehung tatsächlich im Gegenuhrzeigersinn ist.

d) $\mathbf{F}$ hat in allen Punkten, ausser dem Ursprung, Einheitslänge und zeigt radial vom Ursprung weg.

Lösung



Die radiale Richtung ist gegeben durch den Ortsvektor (x, y). Um Einheitslänge zu erreichen, müssen wir noch durch den Betrag dividieren und erhalten $\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)$ (Abbildung d)). Dies ist für $(x, y) \neq (0, 0)$ definiert, für den Ursprung wählen wir $\mathbf{F}(0, 0) = (0, 0)$, damit $\mathbf{F}$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist.