Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

Serie 8

1. Auf dem Rand der Ellipse

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$$

steht ein Zaun der Höhe $H(x,y) = \sqrt{36 + \frac{16}{9}y^2}$. Seine Aussenseite soll gestrichen werden. Stellen Sie ein Integral zur Berechnung der zu streichenden Fläche A auf und berechnen Sie den exakten Wert von A.

Lösung
Wir parametrisieren den Rand C der Ellipse durch

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 10\cos t \\ 6\sin t \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}(t)| &= \sqrt{(-10\sin t)^2 + (6\cos t)^2} \\ &= \sqrt{100\sin^2 t + 36\cos^2 t} = \sqrt{36 + 64\sin^2 t}. \end{aligned}$$

Für die Fläche ergibt sich damit

$$\begin{aligned} A &= \int_C H\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} H\left(x(t), y(t)\right) \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{36 + 64\sin^2 t} \cdot \sqrt{36 + 64\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (36 + 64\sin^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= 72\pi + 64\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= 72\pi + 32\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= 136\pi - 32\int_0^{2\pi} \cos 2t\,\mathrm{d}t \\ &= 136\pi - 16\,\sin 2t\big|_0^{2\pi} = 136\pi - 16(0-0) = 136\pi. \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie die Masse eines dünnen Drahts , der entlang der Kurve C, gegeben durch

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}t \\ \sqrt{2}t \\ 4 - t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

liegt, wenn seine Dichte gegeben ist durch

a) $\rho = 3t$,

Lösung

Wir berechnen zuerst

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2t \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad |\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{2 + 2 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}.$$

Der Draht hat folglich die Masse

$$\begin{aligned} m &= \int_C \rho \,\mathrm{d}s = \int_0^1 \rho(t)|\dot{\mathbf{r}}(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^1 6t\sqrt{1+t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \left[2\left(1+t^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = 4\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

b) $\rho = 1$.

Lösung

$$\begin{aligned} m &= \int_C \rho \,\mathrm{d}s = \int_0^1 \rho(t)|\dot{\mathbf{r}}(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^1 2\sqrt{1+t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \sqrt{1 + \sinh^2 u} \cosh u \,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \cosh^2 u \,\mathrm{d}u = \sqrt{2} + \operatorname{arsinh} 1. \end{aligned}$$

Dabei führen wir die Substitution $t = \sinh u$ durch, verwenden die Identität $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ und benutzen folgende Nebenrechnung mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^x \cosh^2 u \,\mathrm{d}u &= \sinh x \cosh x - \int_0^x \sinh^2 u \,\mathrm{d}u \\ &= \sinh x \cosh x - \int_0^x (\cosh^2 u - 1) \,\mathrm{d}u \\ &= \sinh x \cosh x + x - \int_0^x \cosh^2 u \,\mathrm{d}u \\ \Rightarrow \quad \int_0^x \cosh^2 u \,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left(\sinh x \cosh x + x\right). \end{aligned}$$

3. Ein kreisförmiger Drahtring mit konstanter Dichte ρ liegt auf dem Kreis $x^2+y^2=a^2$ in der xy-Ebene. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Drahtrings um die z-Achse.

Lösung
Wir können den Drahtring durch die Kurve C mit

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

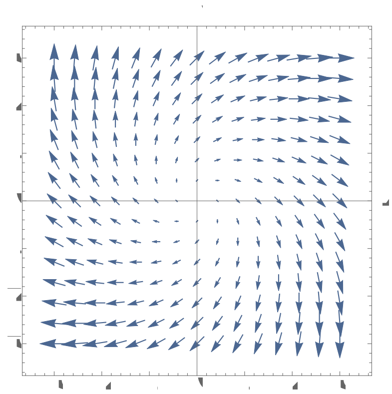
parametrisieren. Wir erhalten

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad |\dot{\mathbf{r}}(t)| = a.$$

Dann gilt für das Trägheitsmoment

$$\Theta_z = \int_C \rho a^2 \,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \rho a^2 |\dot{\mathbf{r}}(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \rho a^3 \,\mathrm{d}t = 2\pi\rho a^3.$$

4. Berechnen Sie für das Vektorfeld



$$\mathbf{F} : (x,y) \mapsto (x+y, y-x)$$

die Arbeit entlang der folgenden Wege C, wobei $P=(0,5)$ und $Q=(0,-5)$:

a) gerade Verbindung von P nach Q
Lösung
Parametrisierung des Weges:

$$\mathbf{r_1} : [0,10] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r_1}(t) = (0, 5-t).$$

Dann ist

$$\mathbf{r_1}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Arbeit beträgt damit

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int\limits_0^{10} \mathbf{F}(\mathbf{r_1}(t)) \cdot \mathbf{r_1}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{10} \begin{pmatrix} 5-t \\ 5-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{10} t - 5\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - 5t\right]_0^{10} = 0.
\end{aligned}$$

b) Halbkreisbogen um $(0,0)$ von P nach Q, gegen den Uhrzeigersinn orientiert;

Lösung

Parametrisierung des Weges:

$$\mathbf{r_2} : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r_2}(t) = (5\cos t, 5\sin t).$$

Dann ist

$$\mathbf{r_2}'(t) = \begin{pmatrix} -5\sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix}.$$

Die Arbeit beträgt damit

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathbf{F}(\mathbf{r_2}(t)) \cdot \mathbf{r_2}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix} 5(\cos t + \sin t) \\ 5(\sin t - \cos t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5\sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 25(-\cos t \sin t - \sin^2 t + \cos t \sin t - \cos^2 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-25)\,\mathrm{d}t = -25\pi.
\end{aligned}$$

c) gerade Verbindung von $(-5,2)$ nach $(5,2)$;

Lösung

Parametrisierung des Weges:

$$\mathbf{r_3} : [0,10] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r_3}(t) = (t-5, 2).$$

Dann ist

$$\mathbf{r_3}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Arbeit beträgt damit

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{10} \mathbf{F}(\mathbf{r_3}(t)) \cdot \mathbf{r_3}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{10} \begin{pmatrix} t-3 \\ 7-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{10} t - 3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - 3t\right]_0^{10} = 20.
\end{aligned}$$

d) gerade Verbindung von $(-5,-3)$ nach $(5,-3)$.

Lösung

Parametrisierung des Weges:

$$\mathbf{r_4} : [0,10] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r_4}(t) = (t-5,-3).$$

Dann ist

$$\mathbf{r_4}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Arbeit beträgt damit

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{10} \mathbf{F}(\mathbf{r_4}(t)) \cdot \mathbf{r_4}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{10} \begin{pmatrix} t-8 \\ 2-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{10} t - 8\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - 8t\right]_0^{10} = -30.
\end{aligned}$$

5. In Abbildung 1 und 2 sind die folgenden Vektorfelder und geschlossenen Kurven skizziert, welche wir in dieser Aufgabe betrachten wollen:

$\mathbf{F} = (y^3, x^3 - 2y)$, $\quad C : \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$;

$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$, $\quad \Gamma$ ist der Rand des Quadrats mit Eckpunkten $(\pm 2, \pm 2)$ im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

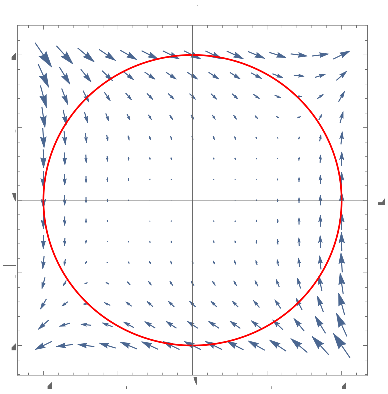


Figure 1: **F** und die Kurve C

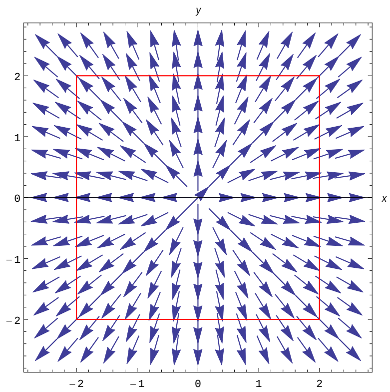


Figure 2: **G** und die Kurve Γ

a) Stellen Sie anhand der Skizzen eine Vermutung auf, ob die Zirkulation von **F** entlang C und **G** entlang Γ positiv, negativ oder gleich Null ist.

Lösung
Aus der Symmetrie der jeweiligen Situation ist es plausibel, dass beide Zirkulationen gleich Null sind.

b) Berechnen Sie jeweils die Zirkulation und interpretieren Sie das Resultat.

- **Lösung**
  Mit der gegebenen Parametrisierung von C erhalten wir die Zirkulation von **F** entlang C im Gegenuhrzeigersinn mit

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 8\sin^3 t \\ 8\cos^3 t - 4\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-16\sin^4 t + 16\cos^4 t - 8\sin t\cos t\right) \mathrm{d}t \\
&\overset{(*)}{=} -8\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= -4\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

  (*) gilt, da $\int_0^{2\pi} \sin^4 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos^4 t\,\mathrm{d}t$.

- **Lösung**
  Γ müssen wir in vier Teilstücken parametrisieren und die Teilintegrale addieren. Der Teilweg Γ_1 ist dabei das Wegstück von $(2, 2)$ nach $(-2, 2)$, die

weiteren Wegstücke folgen im Gegenuhrzeigersinn.

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 : \mathbf{r_1}(t) &= \begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 4, \\
\Gamma_2 : \mathbf{r_2}(t) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2-t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 4, \\
\Gamma_3 : \mathbf{r_3}(t) &= \begin{pmatrix} -2+t \\ -2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 4, \\
\Gamma_4 : \mathbf{r_4}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2+t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 4.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Zirkulation von $\mathbf{G}$ entlang Γ im Gegenuhrzeigersinn

$$\begin{aligned}
& \int_\Gamma \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
= \ & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\Gamma_4} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
= \ & \int_0^4 \mathbf{G}(\mathbf{r_1}(t)) \cdot \mathbf{r_1}'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^4 \mathbf{G}(\mathbf{r_2}(t)) \cdot \mathbf{r_2}'(t)\,\mathrm{d}t \\
& \qquad + \int_0^4 \mathbf{G}(\mathbf{r_3}(t)) \cdot \mathbf{r_3}'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^4 \mathbf{G}(\mathbf{r_4}(t)) \cdot \mathbf{r_4}'(t)\,\mathrm{d}t \\
= \ & \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{8-4t+t^2}} \left(\begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right. \\
& \qquad \left. + \begin{pmatrix} -2+t \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}t \\
= \ & \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{8-4t+t^2}} (-2+t-2+t-2+t-2+t)\,\mathrm{d}t \\
= \ & 4 \int_0^4 \frac{-2+t}{\sqrt{8-4t+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
= \ & 4\sqrt{8-4t+t^2}\,\Big|_0^4 \\
= \ & 4\left(\sqrt{8}-\sqrt{8}\right) = 0.
\end{aligned}$$

c) Stellen Sie anhand der Skizzen eine Vermutung auf, ob der Fluss nach aussen von $\mathbf{F}$ durch C und $\mathbf{G}$ durch Γ positiv, negativ oder gleich Null ist.

- **Lösung**
  Der Fluss nach aussen von $\mathbf{F}$ durch C ist negativ, da im zweiten und vierten Quadranten mehr hineinströmt als im ersten und dritten Quadranten herausströmt (Pfeillänge).
- **Lösung**
  Der Fluss nach aussen von $\mathbf{G}$ durch Γ ist positiv, da an jedem Punkt des Weges das Vektorfeld gegen aussen zeigt.

d) Berechnen Sie jeweils den Fluss nach aussen und interpretieren Sie das Resultat.

- **Lösung**

Der nach aussen orientierte Normalenvektor von C ist $\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$, damit berechnen wir den Fluss nach aussen von $\mathbf{F}$ durch C:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{n} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 8\sin^3 t \\ 8\cos^3 t - 4\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (16\sin^3 t\cos t + 16\cos^3 t\sin t - 8\sin^2 t)\,\mathrm{d}t \\
&= 16\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\,\mathrm{d}t - 8\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 8\left[\sin^2 t\right]_0^{2\pi} - 4\int_0^{2\pi} (1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t \\
&= 4(0-0) - 4\left[t - \tfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\
&= -4(2\pi - 0) = -8\pi.
\end{aligned}$$

- **Lösung**

Der nach aussen orientierte Normalenvektor von Γ müssen wir für jedes Wegstück einzeln betrachten. Von Γ_1 bis Γ_4 beträgt dieser der Reihe nach

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den Fluss nach aussen von $\mathbf{G}$ durch Γ erhalten wir also mit der Formel

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \mathbf{G}\cdot\mathrm{d}\mathbf{n} \\
&= \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}\cdot\mathrm{d}\mathbf{n} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}\cdot\mathrm{d}\mathbf{n} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{G}\cdot\mathrm{d}\mathbf{n} + \int_{\Gamma_4} \mathbf{G}\cdot\mathrm{d}\mathbf{n} \\
&= \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{8-4t+t^2}} \left(\begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \begin{pmatrix} -2+t \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{8-4t+t^2}} (2+2+2+2)\,\mathrm{d}t \quad = \int_0^4 \frac{8}{\sqrt{8-4t+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^4 \frac{8}{\sqrt{(t-2)^2+4}}\,\mathrm{d}t \quad = \int_0^4 \frac{8}{\sqrt{4\left(\left(\frac{t-2}{2}\right)^2+1\right)}}\,\mathrm{d}t \\
&= 4\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t-2}{2}\right)^2+1}}\,\mathrm{d}t \quad = \quad 8\,\mathrm{arsinh}\left(\frac{t-2}{2}\right)\Big|_0^4 \\
&= 8(\mathrm{arsinh}(1) - \mathrm{arsinh}(-1)).
\end{aligned}$$

Um dieses Resultat noch etwas zu vereinfachen, rufen wir uns die Definition

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

in Erinnerung. Offensichtlich gilt also $\sinh x = -\sinh(-x)$. Damit besitzt die Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} x$ dieselbe Eigenschaft, denn das gilt ganz allgemein für eine Funktion f mit Umkehrfunktion f^{-1}, welche $f(x) = -f(-x)$ erfüllt: Es gilt

$$y = -(-y) = -f(f^{-1}(-y)) = f(-f^{-1}(-y))$$

und wenden wir auf diese Gleichung f^{-1} an, so erhalten wir $f^{-1}(y) = -f^{-1}(-y)$. Es gilt also $\operatorname{arsinh}(1) = -\operatorname{arsinh}(-1)$ und damit beträgt der Fluss $16 \operatorname{arsinh}(1)$. Dieses Resultat können wir auch noch anders schreiben. Aus der Rechnung

$$\begin{aligned}
& \sinh x = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & e^x - e^{-x} - 2 = 0 \qquad | \cdot e^x \\
\Leftrightarrow\quad & e^{2x} - 2e^x - 1 = 0 \qquad | \, y := e^x \\
\Leftrightarrow\quad & y^2 - 2y - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\quad & e^x = 1 \pm \sqrt{2} \qquad | \, e^x > 0, \text{ für } x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\quad & e^x = 1 + \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \ln(1 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

folgt, dass $\operatorname{arsinh}(1) = \ln(1 + \sqrt{2})$. Damit kann der Fluss auch geschrieben werden als $16 \ln(1 + \sqrt{2})$.

6. Untersuchen Sie folgende Gebiete jeweils auf die Eigenschaften zusammenhängend und einfach zusammenhängend:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\ y > 0\}$;

Lösung

Diese Menge ist sowohl zusammenhängend als auch einfach zusammenhängend.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0\}$;

Lösung

Diese Menge ist nicht zusammenhängend, es gibt z.B. keinen Weg von $(-1, 0)$ nach $(1, 0)$ innerhalb der Menge. Somit ist sie auch nicht einfach zusammenhängend.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$;

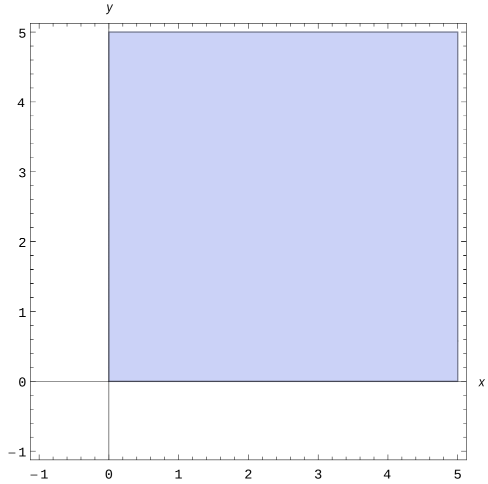
Lösung

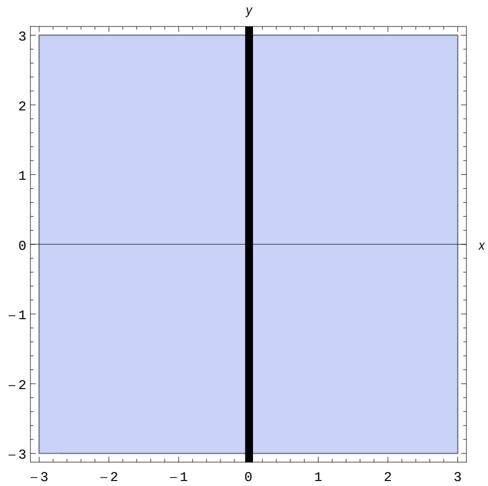
Diese Menge ist zusammenhängend, jedoch nicht einfach zusammenhängend. Geschlossene Wege um den Ursprung kann man nicht zu einem Punkt zusammenziehen.

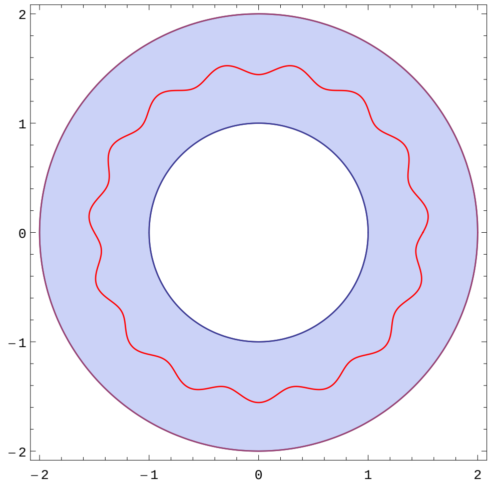
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ oder } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

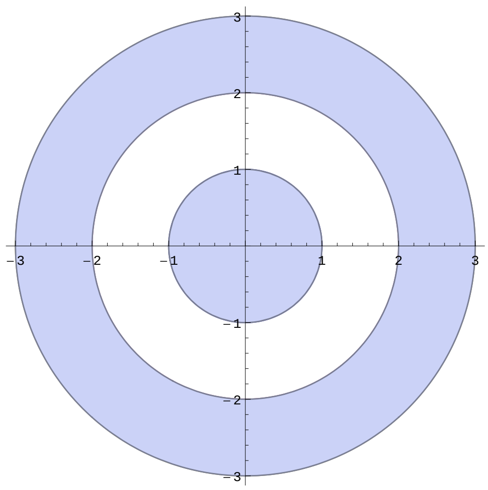
Lösung

Diese Menge ist nicht zusammenhängend, es gibt z.B. keinen Weg von $(0, 0)$ nach $(3, 0)$ innerhalb der Menge. Somit ist sie auch nicht einfach zusammenhängend.


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−1 0 1 2 3 4 5


y
x
3
2
1
0
−1
−2
−3
−3 −2 −1 0 1 2 3


2
1
0
−1
−2
−2 −1 0 1 2


3
2
1
−3
−2
−1
1
2
3
−1
−2
−3