# Serie 9

**1.** Berechnen Sie auf zwei Arten (direkt und mit Hilfe des Satzes von Green) das Linienintegral

$$\int_{\partial D} xy\,\mathrm{d}x + x^2y^3\,\mathrm{d}y,$$

wobei $D$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,2)$ ist.

- **Lösung**
  **Direkte Berechnung:**
  Parametrisierung der Dreiecksseiten $C_1, C_2, C_3$:
  $\mathbf{r_1} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r_1}(t) = (t, 0);$
  $\mathbf{r_2} : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r_2}(t) = (1, t);$
  $\mathbf{r_3} : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r_3}(t) = (1 - \frac{t}{2}, 2 - t).$
  Mit

  $$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2y^3 \end{pmatrix}$$

rechnen wir also

$$
\begin{aligned}
\int\limits_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \quad &= \quad \int\limits_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int\limits_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int\limits_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
&= \quad \int\limits_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r_1}(t)) \cdot \mathbf{r_1}'(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r_2}(t)) \cdot \mathbf{r_2}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \int\limits_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r_3}(t)) \cdot \mathbf{r_3}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \quad \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&\qquad + \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{t}{2}\right)(2-t) \\ \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 (2-t)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \quad \int\limits_0^2 t^3\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^2 \left( -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)(2-t) - \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 (2-t)^3 \right) \mathrm{d}t \\
&\overset{u=2-t}{=} \quad \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 + \int\limits_2^0 \left( -\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)(u) - \left(\frac{u}{2}\right)^2 (u)^3 \right) (-\mathrm{d}u) \\
&= \quad 4 + \int\limits_0^2 \left( -\frac{u^2}{4} - \frac{u^5}{4} \right) \mathrm{d}u \\
&= \quad 4 + \left[ -\frac{u^3}{12} - \frac{u^6}{24} \right]_0^2 = 4 - \frac{2}{3} - \frac{64}{24} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

- **Lösung**
  **Berechnung mit dem Satz von Green:**

$$
\mathbf{F}(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x^2y^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = x, \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xy^3.
$$

Mit dem Satz von Green folgt nun

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \iint\limits_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}A \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2x} (2xy^3 - x) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 \left[ \frac{xy^4}{2} - xy \right]_{y=0}^{2x} \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 \left( 8x^5 - 2x^2 \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[ \frac{4}{3} x^6 - \frac{2}{3} x^3 \right]_{x=0}^{1} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Beide Wege führen natürlich zum selben Resultat.

**2.** Skizzieren Sie die Fläche unter einem Bogen der Zykloide

$$r(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

und benutzen Sie den Satz von Green, um diese Fläche zu ermitteln.

**Lösung**
Die Zykloide schneidet die $x$-Achse für

$$1 - \cos(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2k \cdot \pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Wir wählen den Bogen, welcher sich von 0 bis $2\pi$ erstreckt. Der Rand $C$ dieses Bogens ist parametrisiert durch $r : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$,

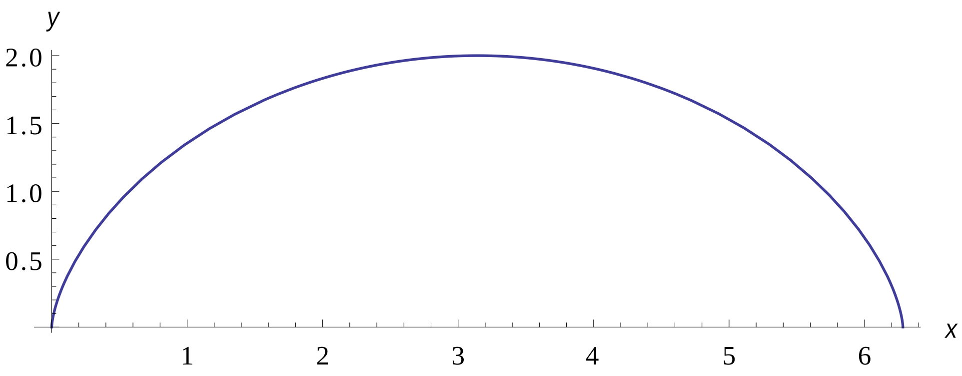
$$r(t) = \begin{cases} (t - \sin t, 1 - \cos t)\,, & \text{falls} \quad t \in [0, 2\pi]; \\ (4\pi - t, 0) & , \text{falls} \quad t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Wir suchen die von $r(t)$ eingeschlossene Fläche $Z$.
Mit einem Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y) = \binom{F_1}{F_2} = \binom{-y}{0}$ mit

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 - (-1) = 1$$

und dem Satz von Green erhalten wir

$$\iint\limits_Z \mathrm{d}A = \iint\limits_Z \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = \int\limits_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$




und

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(r(t)\right) \cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{4\pi} \mathbf{F}\left(r(t)\right) \cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{4\pi} \begin{pmatrix} -0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (-1 + 2\cos t - \cos^2 t)\,\mathrm{d}t \\
&= -2\pi + 0 - \pi = -3\pi.
\end{aligned}$$

Die eingeschlossene Fläche beträgt also $3\pi$. Das negative Vorzeichen ergibt sich aus der "'falschen"' Orientierung des Randes (d.h. im Uhrzeigersinn).

**3.** Wir betrachten folgendes Modell für einen zwei-dimensionalen Ozean: Dieser sei gegeben durch das Quadrat

$$R = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

mit Rand $C$. Eine Strömungsfunktion sei auf $R$ gegeben durch

$$\psi(x, y) = 4 \cos x \cos y,$$

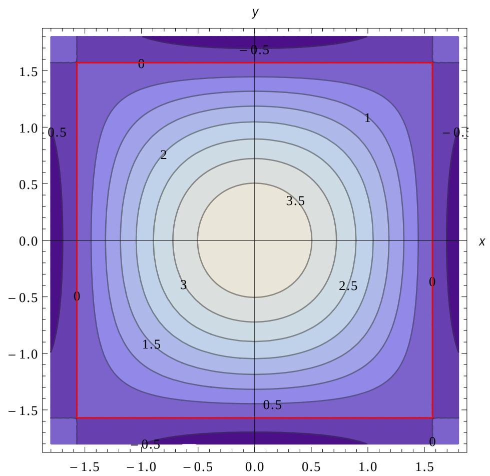
siehe Abbildung.

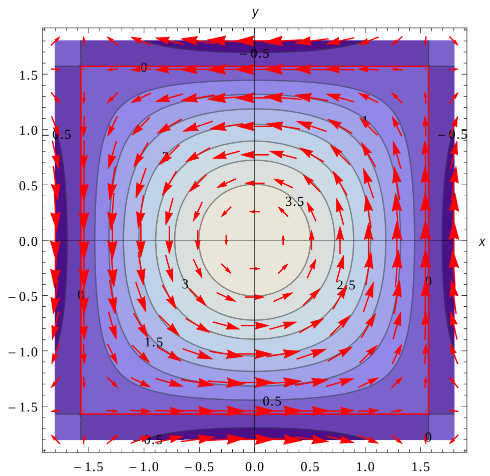
a) Die horizontale Komponente (Ost-West) der Geschwindigkeit ist $u = \psi_y$ und die vertikale Komponente (Nord-Süd) der Geschwindigkeit ist $v = -\psi_x$. Skizzieren Sie einige Geschwindigkeitsvektoren und zeigen Sie, dass dieses Vektorfeld im Gegenuhrzeigersinn fliesst.

**Lösung**

Das Geschwindigkeitsfeld ist gegeben durch

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cos x \sin y \\ 4 \sin x \cos y \end{pmatrix}.$$





Das Vektorfeld ist tangential zu den Niveaulinien $4\cos x \cos y = const$ und deshalb fliesst das Geschwindigkeitsfeld ebenfalls auf diesen deformierten Kreisbahnen. Aus der Definition des Geschwindigkeitsfeldes sieht man, dass dieses senkrecht auf dem Gradientenfeld stehen muss und das Gradientenfeld steht bekanntlich auch senkrecht auf den Niveaulinien.

Dass die Orientierung gegen den Uhrzeigersinn ist, das sieht man durch Auswertung an einem beliebigen Punkt.

b) Ist das Geschwindigkeitsfeld quellenfrei?

**Lösung**

Es gilt

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 4\sin x \sin y - 4\sin x \sin y = 0.$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist also quellenfrei.

c) Ist das Geschwindigkeitsfeld wirbelfrei?

**Lösung**

Es gilt

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 4\cos x \cos y + 4\cos x \cos y = 8\cos x \cos y.$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist also nicht wirbelfrei.

d) Bestimmen Sie den Fluss nach aussen durch $C$ des Geschwindigkeitsfeldes.

**Lösung**

Nach dem Satz von Green II gilt

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \iint_R \operatorname{div}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}A = 0.$$

e) Bestimmen Sie die Zirkulation im Gegenuhrzeigersinn entlang $C$ des Geschwindigkeitsfeldes.

**Lösung**

Nach dem Satz von Green I gilt

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \iint_R \operatorname{rot}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}A \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos x \cos y \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= 8\left[\sin x\right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin y\right]_{y=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 8(1-(-1))(1-(-1)) = 8 \cdot 2 \cdot 2 = 32.
\end{aligned}$$

**4. Prüfungsaufgabe 7, Winter 2015.** Seien $a > 0$ und $b > 0$. Bestimmen Sie unter allen rechteckigen Gebieten

$$G_{a,b} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\right\}$$

dasjenige, für welches der Fluss nach aussen von $\mathbf{F}(x,y) = (-x^2 - 4xy, 6y)$ durch den Rand von $G_{a,b}$ am grössten ist. Welchen Wert hat dieser grösste Fluss?

**Lösung**

Nach dem Satz von Green II gilt für den gesuchten Fluss

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G_{a,b}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} &= \iint_{G_{a,b}} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}A \\
&= \int_0^b \int_0^a (-2x - 4y + 6)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^b \left[-x^2 - 4xy + 6x\right]_{x=0}^{a} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^b (-a^2 - 4ay + 6a) \mathrm{d}y \\
&= \left[-a^2 y - 2ay^2 + 6ay\right]_{y=0}^{b} \\
&= -a^2 b - 2ab^2 + 6ab.
\end{aligned}$$

Wir müssen nun das Maximum von

$$f(a,b) = -a^2b - 2ab^2 + 6ab$$

für $a > 0$ und $b > 0$ suchen. Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte:

$$\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} -2ab - 2b^2 + 6b \\ -a^2 - 4ab + 6a \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $b \neq 0$ gilt, folgt aus der ersten Komponente

$$-2a - 2b + 6 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{6-2a}{2} = 3 - a.$$

Dies setzen wir in die zweite Komponente ein und beachten ebenfalls $a \neq 0$:

$$-a - 4b + 6 = 0 \Leftrightarrow -a - 12 + 4a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Der kritische Punkt $(2,1)$ ist ein Maximum, wie sich überprüfen lässt. Wir wenden das Kriterium aus der Vorlesung an:

$$f_{aa}(a,b) = -2b, \qquad f_{bb}(a,b) = -4a, \qquad f_{ab}(a,b) = -2a - 4b + 6,$$
$$D = f_{ab}^2 - f_{aa}f_{bb} = (-2a - 4b + 6)^2 - 8ab.$$

Es folgt für den Punkt $(2,1)$:

$$D = -12 < 0, \quad f_{aa}(2,1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum.}$$

Der maximale Fluss beträgt also $f(2,1) = 4$.

**5.** *(Energieerhaltung)* Ein Objekt mit Masse $m$ bewegt sich in einem konservativen Kraftfeld $\mathbf{F} = -\nabla\phi$, wobei $\phi$ das Potential ist.

a) Die Geschwindigkeit des Objekts sei gegeben durch $\mathbf{v}(t)$. Zeigen Sie

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}).$$

**Lösung**
Mit der Produktregel für das Skalarprodukt folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v}.$$

Dividiert man diese Gleichung durch 2, so ist die gewünschte Identität gezeigt.

b) Wir nehmen an, dass die Bewegung des Objekts in der Ebene oder im Raum von Punkt $A$ nach Punkt $B$ erfolgt. Die Bewegung wird nach dem zweiten Newtonschen Gesetz beschrieben durch $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, wobei $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$ der Beschleunigungsvektor ist. Zeigen Sie mit Hilfe eines Linienintegrals, dass die totale Energie (kinetisch plus potentiell) $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + \phi$ bei $A$ und $B$ gleich ist. D.h., die Energie bleibt entlang Pfaden zwischen $A$ und $B$ erhalten.

**Lösung**

Wenn wir die gegebene Gleichung

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi = m\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$$

mit $\mathbf{v}$ skalar-multiplizieren, so ergibt sich

$$-\nabla\phi \cdot \mathbf{v} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} \overset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}). \tag{1}$$

Sei nun $\mathbf{r}(t), 0 \leq t \leq 1$ die Parametrisierung eines Weges $C$ von $A$ nach $B$, es gilt also $r(0) = A$ und $r(1) = B$. Weiter gilt $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t)$ und damit können wir $\mathbf{F}$ entlang $\mathbf{r}(t)$ integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \nabla\phi(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\phi(\mathbf{r}(t))\right)\,\mathrm{d}t = -\left[\phi(\mathbf{r}(t))\right]_0^1 \\
&= -\phi(\mathbf{r}(1)) + \phi(\mathbf{r}(0)) = \phi(A) - \phi(B).
\end{aligned}$$

Das ist genau die linke Seite von Gleichung (1) integriert nach $t$ mit Schranken 0 und 1. Machen wir dasselbe für die rechte Seite, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}m(\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{v}(t))\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}m(\mathbf{v}(1)\cdot\mathbf{v}(1)) - \frac{1}{2}m(\mathbf{v}(0)\cdot\mathbf{v}(0)) \\
&= \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(1)|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(0)|^2.
\end{aligned}$$

Insgesamt wird Gleichung (1) also zu

$$\begin{aligned}
& \phi(A) - \phi(B) = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(1)|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(0)|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(0)|^2 + \phi(A) = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(1)|^2 + \phi(B).
\end{aligned}$$

Damit ist die totale Energie im Punkt $A$ und $B$ identisch und in einem konservativen Kraftfeld gilt die Erhaltung der Energie (kinetisch plus potentiell). Diese Eigenschaft ist überhaupt der Grund, weswegen solche Vektorfelder als "konservativ" bezeichnet werden (engl.: to conserve = erhalten).

c) Das Gravitationsfeld zwischen zwei Punktmassen $M$ und $m$ ist gegeben durch

$$\mathbf{F} = -GMm\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -GMm\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

wobei $G$ die Gravitationskonstante bezeichnet. $M$ befindet sich dabei im Ursprung und $m$ im Punkt $\mathbf{r} = (x,y,z)$.
Zeigen Sie, dass $\mathbf{F}$ ausserhalb des Ursprungs konservativ ist und bestimmen Sie ein Potential $\phi$ mit $\mathbf{F} = -\nabla\phi$.
**Lösung**
Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{F}) &= \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \times \left(-GMm\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right)\\ &= 3GMm\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\begin{pmatrix}zy-yz\\ xz-zx\\ yx-xy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Das Vektorfeld $\mathbf{F}$ ist damit wirbelfrei, also konservativ ausserhalb des Ursprungs. Gesucht ist nun noch ein Potential $\phi$, also eine Funktion $\phi(x,y,z)$ mit $-\nabla\phi = \mathbf{F}$. Es muss also in der ersten Komponente

$$\phi_x \stackrel{!}{=} -F_1 = GMm\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

gelten, integrieren nach $x$ ergibt

$$\phi(x,y,z) = -GMm\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + C(y,z).$$

In der zweiten Komponente ergibt das

$$\phi_y = GMm\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial C}{\partial y}(y,z) \stackrel{!}{=} -F_2 = GMm\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

das heisst $\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = 0$, also $C(y,z) = C(z)$. In der dritten Komponente ergibt das

$$\phi_z = GMm\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial C}{\partial z}(z) \stackrel{!}{=} -F_3 = GMm\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

das heisst $\frac{\partial C}{\partial z}(z) = 0$, also $C(z) \equiv C$. Zusammengefasst ist jede Funktion

$$\phi(x,y,z) = -GMm\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

ein Potential von $\mathbf{F}$.

d) Bestimmen Sie die Arbeit von einem Punkt $A$ zu einem Punkt $B$. Ist diese Arbeit abhängig vom gewählten Weg?

**Lösung**

Wie in Teilaufgabe b) beträgt die Arbeit $\phi(A) - \phi(B)$ und ist unabhängig vom gewählten Weg (und von der Parametrisierung dieses Weges). Konkret:

$$\begin{aligned}\phi(A) - \phi(B) &= -GMm\frac{1}{|A|} + C - \left(-GMm\frac{1}{|B|} + C\right)\\ &= GMm\left(\frac{1}{|B|} - \frac{1}{|A|}\right).\end{aligned}$$