Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

Serie 12

1. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x^2 - 2xy + y^2, \qquad y(0) = 0. \tag{1}$$

a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung im Bereich $[0, 3] \times [0, 3]$. Entlang welcher Linien hat y' jeweils konstante Werte?

Lösung

Das Richtungsfeld der Differentialgleichung (siehe Abbildung 1) zeigt jeweils identische Steigungen y' entlang aller Geraden, für welche $x - y = \mathit{const}$ gilt. Dies lässt sich so erklären, dass

$$y'(x) = (x - y)^2$$

gilt und die Steigung also genau dann konstant ist, wenn $x - y = \mathit{const}$ gilt.

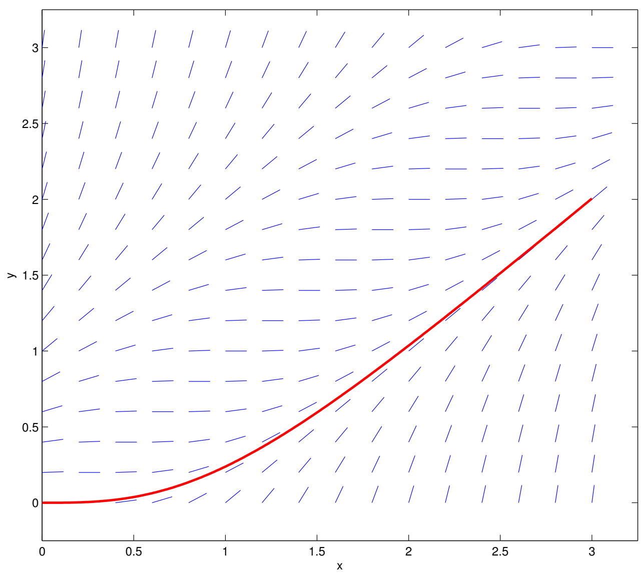

Figure 1: Richtungsfeld der DGL $y'(x) = x^2 - 2\,xy + y^2$; die dicke Linie zeigt die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

b) Warum kann die Differentialgleichung nicht mittels Separation der Variablen gelöst werden?

Lösung

Damit eine Differentialgleichung mittels Separation der Variablen gelöst werden

kann, muss ihre rechte Seite in der Form $g(x) \cdot h(y)$ geschrieben werden können. Für die gegebene rechte Seite $x^2 - 2\,xy + y^2$ ist das nicht möglich, wie folgende kurze Überlegung zeigt:
Angenommen, es gibt Funktionen $g(x)$ und $h(y)$, so dass

$$x^2 - 2\,xy + y^2 = g(x)\,h(y). \tag{2}$$

Insbesondere gilt dann

$$0 = g(0)\,h(0).$$

Also muss (i) $g(0) = 0$ oder (ii) $h(0) = 0$ sein. Im Fall (i) liefert Gleichung (2) mit $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$ beliebig, dass

$$y^2 = 0 \quad \text{für alle } \; y \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

im Fall (ii) liefert dieselbe Gleichung mit $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$ beliebig, dass

$$x^2 = 0 \quad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Sowohl (3) als auch (4) sind aber offensichtlich falsch! Deswegen muss die obige Annahme, dass $x^2 - 2\,xy + y^2$ als Produkt $g(x)\,h(y)$ geschrieben werden kann, ebenfalls falsch sein.

c) Substituieren Sie $y(x)$ durch ein geeignetes $u(x)$, so dass die auf $u(x)$ transformierte Differentialgleichung separierbar wird.

Lösung
Die rechte Seite der Differentialgleichung kann mittels binomischer Formel faktorisiert werden:

$$x^2 - 2\,xy + y^2 = (x - y)^2.$$

Als Substitution bietet sich also $u(x) = x - y$ an. Die linke Seite der Differentialgleichung beinhaltet die Ableitung $y'(x)$, welche wir umrechnen müssen:

$$y(x) = x - u(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 1 - u'(x).$$

Wenn wir jetzt in die ursprüngliche Differentialgleichung einsetzen, erhalten wir die transformierte Differentialgleichung

$$y'(x) = (x - y)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 - u'(x) = u^2(x) \quad \Rightarrow \quad \underline{u'(x) = 1 - u^2(x)}.$$

Diese Differentialgleichung ist separierbar. (Die Situation ist sogar noch besser: Ihre rechte Seite hängt nur vom Funktionswert $u(x)$ ab!) Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ wird zu

$$u(0) = 0 - y(0) = 0.$$

d) Lösen Sie die transformierte Differentialgleichung. Berechnen Sie anschliessend aus der gefundenen Lösung $u(x)$ die Funktion $y(x)$.

Lösung
Wir finden $u(x) \equiv 1$ und $u(x) \equiv -1$ als Gleichgewichtslösungen ($u'(x)$ ist in diesen

Fällen gleich 0, und die Differentialgleichung $u'(x) = 1 - u^2(x)$ ist offensichtlich erfüllt). Diese Gleichgewichtslösungen entsprechen den Lösungen $y(x) = x - 1$ und $y(x) = x + 1$ der ursprünglichen Differenzialgleichung. Diese beiden Lösungen lassen sich auch gut aus dem Richtungsfeld ablesen.
Falls $u(x) \neq \pm 1$, können wir die Variablen trennen und erhalten

$$u'(x) = 1 - u^2(x) \quad \overset{u(x)\neq\pm 1}{\Leftrightarrow} \quad \frac{u'(x)}{1 - u^2(x)} = 1.$$

Für die rechte Gleichung berechnen wir jeweils das unbestimmte Integral:

$$\begin{array}{rrcl} & \int \frac{u'(x)}{1-u^2(x)}\,\mathrm{d}x & = & \int \mathrm{d}x \\ \Rightarrow & \operatorname{arctanh}(u(x)) & = & x + C \\ \Rightarrow & u(x) & = & \tanh(x + C). \end{array}$$

Damit die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ erfüllt ist, muss die Konstante C gleich 0 gesetzt werden. Die Lösung lautet also

$$u(x) = \tanh(x).$$

Abschliessend muss die Substitution noch rückgängig gemacht werden, um die Lösung $y(x)$ der ursprünglichen Differentialgleichung zu erhalten. Also

$$y(x) = x - u(x) = x - \tanh(x).$$

Kontrolle:

$$y'(x) = 1 - \tanh'(x) = 1 - \big(1 - \tanh^2(x)\big) = \tanh^2(x) = (x - y(x))^2 \quad \checkmark$$

e) Zeichnen Sie $y(x)$ in Ihre Skizze aus Teil **a)** ein.
Lösung
Siehe Abbildung. Beachte, wie die Lösung tatsächlich den Richtungen folgt!

2. a) Berechnen Sie die Orthogonaltrajektorien für die Familie von Kurven

$$y_c = cx^4, \quad c \in \mathbb{R}$$

und skizzieren Sie diese.
Lösung

Sei $y_\perp$ die Familie der Orthogonaltrajektorien. Für einen gegebenen Punkt x_0 haben wir

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y_\perp(x_0) & = & y_c(x_0) & (1) \\ y'_\perp(x_0) & = & -\frac{1}{y'_c(x_0)} & (2) \end{array} \right. .$$

Wir suchen nun eine Differenzialgleichung für $y_\perp$, die nur Ableitungen der Funktion $y_\perp$ und die Variable x enthält. Weil

$$y'_c(x) = 4cx^3 \text{ und } y_c(x) = cx^4, \text{ bekommen wir } y'_c(x) = 4\frac{y_c(x)}{x}.$$

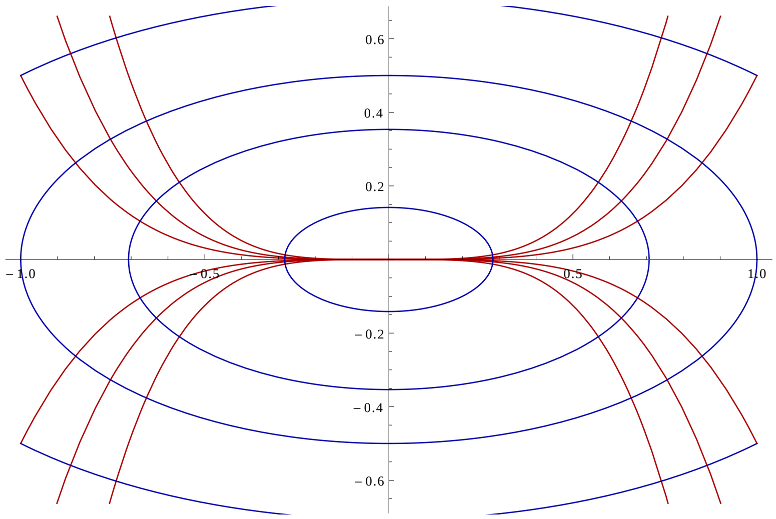

Figure 2: Einige der Kurven aus y_c (rot) und einige Kurven aus $y_\perp$ (blau)

Damit ist die Steigung für die zugehörigen Orthogonaltrajektorien gegeben durch

$$y_\perp'(x) \stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{4\frac{y_c(x)}{x}} = -\frac{x}{4y_c(x)} \stackrel{(1)}{=} -\frac{x}{4y_\perp(x)}.$$

Damit bekommen wir mittels Separation der Variablen

$$\begin{array}{rrcl} & 4y_\perp \frac{\mathrm{d}y_\perp}{\mathrm{d}x} & = & -x \\ \Leftrightarrow & 4y_\perp \,\mathrm{d}y_\perp & = & -x\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow & \int 4y_\perp \,\mathrm{d}y_\perp & = & \int -x\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow & 2y_\perp^2 + \frac{x^2}{2} & = & \tilde{c}, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Die Orthogonaltrajektorien sind also Ellipsen, siehe Abbildung 2.

b) Berechnen Sie die Orthogonaltrajektorien für die Familie von Kurven

$$y_c = c\sin x, \quad c \in \mathbb{R}$$

und skizzieren Sie diese.

Lösung

Wir gehen gleich vor wie bei der obigen Teilaufgabe. Es gilt also

$$y_c'(x) = c\cos x \text{ und } y_c(x) = c\sin x \text{ und damit } y_c'(x) = \frac{y_c(x)}{\tan x}.$$

Damit ist die Steigung für die zugehörigen Orthogonaltrajektorien gegeben durch

$$y_\perp'(x) \stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{\frac{y_c(x)}{\tan x}} = -\frac{\tan x}{y_c(x)} \stackrel{(1)}{=} -\frac{\tan x}{y_\perp(x)}.$$

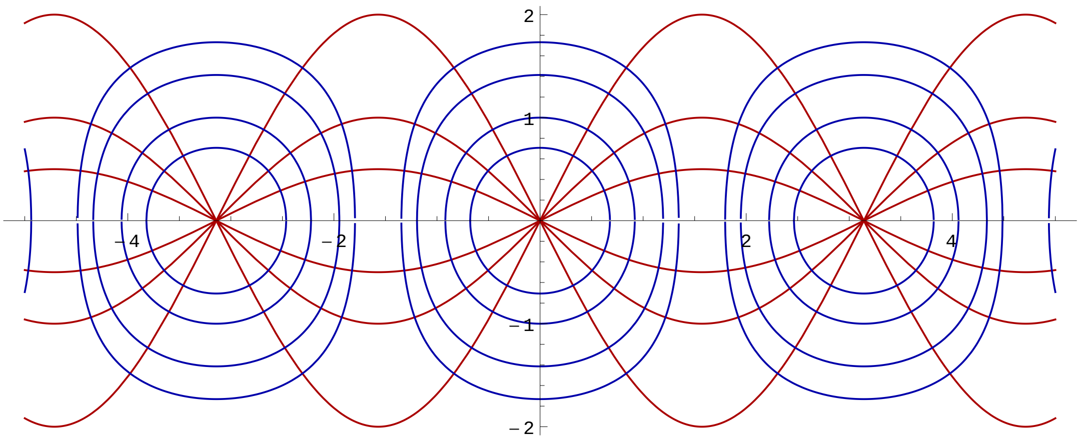

Figure 3: Einige der Kurven aus y_c (rot) und einige Kurven aus $y_\perp$ (blau)

Damit bekommen wir mittels Separation der Variablen

$$\begin{array}{rrcl} & y_\perp \frac{\mathrm{d}y_\perp}{\mathrm{d}x} & = & -\tan x \\ \Leftrightarrow & y_\perp \,\mathrm{d}y_\perp & = & -\tan x \,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow & \int y_\perp \,\mathrm{d}y_\perp & = & \int -\tan x \,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}y_\perp^2 - \ln(|\cos x|) & = & \tilde{c}, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Jede Orthogonaltrajektorie ergibt deformierte Kreise, welche sich entlang der x-Achse wiederholen. Die Mittelpunkte sind dabei die Nullstellen der Sinus-Funktion, also πk, $k \in \mathbb{Z}$. Siehe Abbildung 3.

3. **Prüfungsaufgabe 7, Sommer 2011.** Ein nach Hitze strebendes Teilchen hat die Eigenschaft, dass es sich in jedem Punkt (x, y) der Ebene in Richtung des maximalen Temperaturanstiegs bewegt. Die Temperatur im Punkt (x, y) sei gegeben durch die Funktion $T(x, y) = -e^{-2y} \cos x$. Bestimmen Sie eine Gleichung $y = f(x)$ für den Weg eines nach Hitze strebenden Teilchens, welches im Punkt $(\frac{\pi}{4}, 0)$ startet.

Lösung
Sei $r(t) = (x(t), y(t))^T$ die Parametrisierung des Weges des Teilchen. Das Teilchen folgt stets der Richtung des maximalen Temperaturanstiegs:

$$\dot{r}(t) \parallel \nabla T(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \nabla T(x,y) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} e^{-2y}\sin x \\ 2e^{-2y}\cos x \end{pmatrix} \text{ für } \lambda > 0 \; .$$

Lokal kann man die Falllinie als Funktion $y(x)$ auffassen, für welche gilt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{2e^{-2y}\cos x}{e^{-2y}\sin x} \; .$$

Mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x)$ können wir das umschreiben und erhalten

$$y'(x) = 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \; .$$

Diese Differentialgleichung können wir durch einfaches Integrieren lösen. Mit $g(x) = \sin x$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} y(x) &= 2\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = 2\ln|g(x)| + C = 2\ln|\sin x| + C \\ &= \ln(\sin^2 x) + C. \end{aligned}$$

Mit dem Startwert $(\frac{\pi}{4}, 0)$ bestimmen wir nun noch die Konstante:

$$0 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left(\sin^2\frac{\pi}{4}\right) + C = \ln\frac{1}{2} + C,$$

also $C = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$ und damit

$$y(x) = \ln(\sin^2(x)) + \ln 2 = \ln(2\sin^2 x).$$

Bemerkung:
Durch Einsetzen dieses Weges in die Temperaturfunktion erhalten wir nach einer kurzen Rechnung

$$T(x, y(x)) = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x}.$$

Wir sehen also, dass $\lim_{x\to 0} T(x, y(x)) = -\infty$ und $\lim_{x\to\pi} T(x, y(x)) = \infty$. Also sieht der Weg unseres Teilchens wie folgt aus: Vom Startpunkt $(\frac{\pi}{4}, 0)$ bewegt es sich auf dem Graphen der Funktion $y(x)$ in positiver x-Richtung bis zum Punkt $x = \pi$. Dabei geht $y(x)$ gegen $-\infty$.

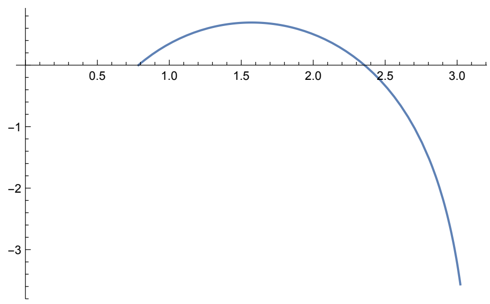

Figure 4: Weg des Teilchen.

4. Einem Patient wird per Infusion ein Medikament verabreicht. Pro Minute gelangen 0.1 mg ins Blut. Gleichzeitig baut die Niere pro Minute 5% der im Blut vorhandenen Medikamentenmenge ab. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die momentane Medikamentenmenge $M(t)$ im Blut auf und lösen Sie diese. Wie viel des Medikaments wird sich auf lange Sicht im Blut befinden?

Lösung
In der Zeitdauer Δt gelangen durch die Infusion $0,1\Delta t$ mg des Medikaments ins Blut, während die Niere ungefähr $0.05\Delta t\, M(t)$ davon abbaut. Die Bilanz lautet in der Zeitdauer Δt also

$$M(t + \Delta t) - M(t) \approx 0,1\Delta t - 0,05\Delta t\, M(t).$$

Dividieren wir nun durch Δt, so ergibt sich

$$\frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} \approx 0,1 - 0,05M(t) = 0.05(2 - M(t))$$

und mit $\Delta t \to 0$

$$M'(t) = 0,05(2 - M(t)).$$

Diese Differenzialgleichung können wir durch Separation lösen.

$$\begin{aligned} \frac{M'}{M-2} &= -0.05 \\ \int \frac{1}{M-2}\,\mathrm{d}M &= -\int 0.05\,\mathrm{d}t \\ \ln(|M-2|) &= -0.05t + C_1 \\ M(t) &= 2 + C_2 e^{-0,05t} \end{aligned}$$

mit $C_2 = \pm e^{C_1}$.

Auf lange Sicht (sprich $t \to \infty$) wird sich damit

$$\lim_{t\to\infty} M(t) = 2 \text{ mg}$$

des Medikaments im Blut des Patienten befinden.

Bemerkung: Die Konstante C_2 haben wir nicht näher bestimmt. Eine typische Anfangsbedingung wäre beispielsweise, dass die Anfangsmenge des Medikaments, welche sich zu Beginn der Behandlung im Blut befindet, gegeben ist, also $M(0) = M_0$. Damit lässt sich $C_2 = M_0 - 2$ finden und damit die Lösung

$$M(t) = 2 + (M_0 - 2)e^{-0,05t}.$$

Beachte insbesondere, dass sich die Konzentration des Medikaments im Blut unabhängig von der Anfangsmenge auf lange Sicht bei 2 mg einpendeln wird!

5. **Prüfungsaufgabe 4, Sommer 2013.** Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{1+x^2} \cdot y(x) = 8$$

für $x > 0$ mit der Nebenbedingung $y(1) = 4$.

Lösung

Wir betrachten zuerst die homogene Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{1+x^2} \cdot y(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2}{1+x^2} \cdot y(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Wir integrieren nun auf beiden Seiten nach x und erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \quad \ln|y| = -\ln(1+x^2) + C \\ &\Leftrightarrow \quad |y| = e^{-\ln(1+x^2)+C} = e^{-\ln(1+x^2)}\cdot e^C \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{C_2}{e^{\ln(1+x^2)}} = \frac{C_2}{1+x^2},\end{aligned}$$

für $C_2 = \pm e^C$. Um die allgemeine Lösung zu bestimmen, führen wir eine Variation der Konstanten durch und wählen deswegen den Anstatz

$$y(x) = \frac{C_2(x)}{1+x^2}.$$

Setzen wir diesen in die inhomogene Gleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}&\frac{C_2'(x)(1+x^2) - C_2(x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2\cdot x} + \frac{2C_2(x)}{(1+x^2)^2} = 8 \\ \Leftrightarrow \quad &\frac{C_2'(x)(1+x^2)}{(1+x^2)^2\cdot x} = 8 \\ \Leftrightarrow \quad &C_2'(x) = 8x(1+x^2) = 8x^3 + 8x.\end{aligned}$$

Integration ergibt

$$C_2(x) = 2x^4 + 4x^2 + C_3$$

und damit

$$y(x) = \frac{2x^4 + 4x^2 + C_3}{1+x^2}.$$

Die Nebenbedingung führt zu

$$4 = y(1) = \frac{2+4+C_3}{1+1} = 3 + \frac{C_3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad C_3 = 2.$$

Damit lautet die Lösung

$$y(x) = \frac{2x^4 + 4x^2 + 2}{1+x^2} = \frac{2(1+x^2)^2}{1+x^2} = 2(1+x^2).$$