Serie 13

1. Prüfungsaufgabe 4, Winter 2014. Bestimmen Sie die Funktion, für die gilt: An jeder Stelle des Definitionsbereichs ist die Steigung des Graphen der Funktion proportional zur dritten Wurzel des Funktionswerts an dieser Stelle. Zudem soll der Graph dieser Funktion durch die Punkte $(0, 8)$ und $(1, 27)$ gehen.

Lösung
Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y'(x) &= a\sqrt[3]{y(x)} \\ y(0) &= 8 \\ y(1) &= 27. \end{aligned}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a\sqrt[3]{y} \\ \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} &= a\,dx \\ \int \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,dy &= \int a\,dx \\ \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} &= ax + c \\ y &= (bx+d)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

und setzen ein

$$\begin{array}{llcll} x = 0 & \Rightarrow & d^{\frac{3}{2}} = 8 & \Rightarrow & d = 4 \\ x = 1 & \Rightarrow & (b+4)^{\frac{3}{2}} = 27 & \Rightarrow & b = 5. \end{array}$$

Die Funktion ist also

$$y(x) = (5x+4)^{\frac{3}{2}}.$$

2. a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' + 5y'' - y' - 5y = 0.$$

Lösung
Für das charakteristische Polynom gilt

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 5 \stackrel{!}{=} 0.$$

Um diese Gleichung 3. Ordnung zu lösen, müssen wir zuerst eine Lösung erraten, z.B. ist $\lambda_1 = 1$ eine Lösung.
Deshalb klammern wir nun den Faktor $(\lambda - 1)$ aus dem charakteristischen Polynom aus (oder Polynomdivision benutzen) und erhalten so die Faktorisierung

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + 6\lambda + 5) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 5) \cdot (\lambda + 1).$$

Also sind die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -5, \quad \lambda_3 = -1.$$

Es ergibt sich damit die allgemeine Lösung (alle Nullstellen sind verschieden und reell)

$$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + C_3 \cdot e^{-5x}.$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 0$$

zu der Anfangsbedingung $y(1) = y'(1) = 2$.
Lösung
Für die DGL $y'' + y' = 0$ ist das charakteristische Polynom

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1,$$

also ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 \cdot e^{-1 \cdot x} = C_1 + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen gibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= y(1) = C_1 + C_2 \cdot e^{-1} \\ 2 &= y'(1) = -C_2 e^{-1}. \end{aligned}$$

Also ist $C_2 = -2e$ und $C_1 = 2 + 2 \cdot e \cdot e^{-1} = 4$, d.h. die Lösung ist

$$y(x) = 4 - 2 \cdot e \cdot e^{-x} = 4 - 2 \cdot e^{1-x}.$$

c) Die Differentialgleichung

$$f'' + 2qf' + (q + q^2)f = 0$$

enthält einen (reellen) Parameter q. Für welche Werte von q bleiben **alle** Lösungen für $x \to \infty$ beschränkt?
Lösung
Für die Differentialgleichung

$$f'' + 2qf' + (q + q^2)f = 0$$

ist das charakteristische Polynom

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = \lambda^2 + 2q\lambda + (q + q^2) = 0,$$

also sind die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4(q+q^2)}}{2} = -q \pm \sqrt{-q}.$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:
$\underline{q > 0}$:
In diesem Fall sind die Nullstellen nicht reell, es gilt

$$\lambda_{1,2} = -q \pm i\sqrt{q}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$f(x) = e^{-q \cdot x} \cdot (C_1 \cos(\sqrt{q}x) + C_2 \sin(\sqrt{q}x)),$$

d.h. die Lösungen sind alle beschränkt für $q > 0$ für $x \to \infty$ (sie streben sogar gegen Null!).
$\underline{q = 0}$:
Die Nullstellen sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und damit ist die allgemeine Lösung

$$f(x) = C_1 + C_2 \cdot x$$

und die Lösung ist nur beschränkt für $x \to \infty$ falls $C_2 = 0$, sonst ist die Lösung unbeschränkt.
$\underline{q < 0}$:
Die Nullstellen sind reell und die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$f(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}.$$

Ausserdem gilt, dass $\lambda_1 = -q + \sqrt{-q} > 0$ ist und damit sind Lösungen mit $C_1 \neq 0$ und $C_2 = 0$ sicher nicht beschränkt.
Insgesamt erhalten wir also, dass nur für den Fall $q > 0$ alle Lösungen beschränkt sind.
Bemerkung: Wenn es zusätzlich interessiert, ob es überhaupt beschränkte Lösungen ausser der Nulllösung gibt, muss man im Fall $q < 0$ eine weitere Fallunterscheidung treffen.
Konkret: Für $-1 < q < 0$ gilt (da $\sqrt{-q} = \sqrt{q} > q$)

$$\lambda_1 = -q + \sqrt{-q} > 0, \quad \lambda_2 = -q - \sqrt{-q} < 0.$$

Es gibt also sowohl beschränkte Lösungen (ungleich Null) als auch unbeschränkte.
Das gleiche gilt für $q = -1$: Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$ und die Lösung ist $f(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2$.
Andererseits ist für $q < -1$ stets $q > \sqrt{q}$ und die Nullstellen sind beide positiv, also sind alle Lösungen, ausser der Nulllösung, unbeschränkt für $t \to \infty$.

d) Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0,$$

welche die Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \qquad y^{(3)}(0) = 1$$

erfüllt.

Lösung

Das charakteristische Polynom der DGL

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

ist

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2 \cdot (\lambda + i)^2,$$

und die Nullstellen sind

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -i.$$

Damit ist die allgemeine Lösung eine Linearkombination aus den Funktionen

$$e^{ix}, \quad xe^{ix}, \quad e^{-ix}, \quad xe^{-ix}$$

oder, äquivalent dazu (da y eine reelle Funktion sein soll und

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

gilt), eine Linearkombination der Funktionen

$$\sin(x), \quad x\sin(x), \quad \cos(x), \quad x\cos(x),$$

d.h.

$$y(x) = C_1 \cdot \sin(x) + C_2 x \cdot \sin(x) + C_3 \cdot \cos(x) + C_4 \cdot x\cos(x)\ .$$

Wir müssen nun die Ableitungen der allgemeinen Lösung $y(x)$ berechnen und die Anfangsbedingungen verwenden um die Konstanten zu bestimmen.
Es gilt

$$y(0) = C_3 \stackrel{!}{=} 0,$$

d.h. wir haben nur noch

$$y(x) = C_1 \cdot \sin(x) + C_2 x \cdot \sin(x) + C_4 \cdot x\cos(x).$$

Es ist also

$$y'(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \cdot (\sin(x) + x \cdot \cos(x)) + C_4(\cos(x) - x\sin(x))$$

und

$$y'(0) = C_1 + C_4 \stackrel{!}{=} 0.$$

Für die zweite Ableitung bekommen wir also

$$y''(x) = -C_1 \sin(x) + C_2(2\cos(x) - x\sin(x)) + C_4(-2\sin(x) - x\cos(x))$$

und damit

$$y''(0) = 2C_2 \overset{!}{=} 0,$$

also auch $C_2 = 0$.
Damit erhalten wir für die dritte Ableitung

$$y'''(x) = -C_1 \cos(x) + C_4(-3\cos(x) + x \cdot \sin(x))$$

und

$$y'''(0) = -C_1 - 3C_4 \overset{!}{=} 1.$$

Damit haben wir für die letzten zwei Konstanten C_1 und C_4 das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_1 + C_4 &=& 0 \\ -C_1 - 3C_4 &=& 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 &=& 1/2 \\ C_4 &=& -1/2 \end{array} \right. .$$

Die gesuchte Lösung lautet also

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x).$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen und lösen Sie in c) und d) das zugehörige Anfangswertproblem.

a) $2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1$

Lösung
Wir betrachten getrennt die Probleme

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) \tag{1}$$

und

$$2y'' + 3y' + 10y = 1. \tag{2}$$

Zuerst lösen wir das homogene Problem

$$2y'' + 3y' + 10y = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 10$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{71}\right) \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{71}\right).$$

Also ist die allgemeine homogene reelle Lösung $y_h(x)$ von (1) und (2)

$$y_h(x) = e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Es bleibt also eine partikuläre Lösung für (1) und (2) zu bestimmen. Für (1) machen wir den Ansatz

$$y_{p_1}(x) = C_3 \sin(2x) + C_4 \cos(2x).$$

Einsetzen in (1) liefert

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2(-4C_3 \sin(2x) - 4C_4 \cos(2x)) + 3(2C_3 \cos(2x) - 2C_4 \sin(2x)) \\
&\quad + 10(C_3 \sin(2x) + C_4 \cos(2x)) \\
&= (2C_3 - 6C_4)\sin(2x) + (6C_3 + 2C_4)\cos(2x).
\end{aligned}$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
2C_3 - 6C_4 &= 1 \\
6C_3 + 2C_4 &= 0
\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$C_3 = \frac{1}{20} \quad \text{und} \quad C_4 = -\frac{3}{20}.$$

Also ist

$$y_{p_1}(x) = \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x)$$

eine partikuläre Lösung von (1). Nun bestimmen wir eine partikuläre Lösung von (2). Dazu machen wir den Ansatz

$$y_{p_2}(x) = C_5.$$

Durch Einsetzen berechnen wir $C_5 = \frac{1}{10}$, somit ist $y_{p_2}(x) = \frac{1}{10}$ eine Lösung von (2). Aus der Linearität der Differentialgleichung folgt, dass

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\
&= e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x) + \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

die allgemeine Lösung von

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1$$

ist.

b) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$

Lösung

Das homogene Problem ist

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0,$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Dieses hat die offensichtliche Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und es folgt mittels Polynomdivision

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1).$$

Das verbleibende Polynom 3. Grades hat wiederum $\lambda_2 = 1$ als Nullstelle und eine weitere Polynomdivision ergibt

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 1).$$

Daraus sehen wir $\lambda_3 = i$ und $\lambda_4 = -i$. Somit ist die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x).$$

Es bleibt noch eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ zu finden. Dazu machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2 e^x,$$

denn 1 ist doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} e^x &= (12A + 8Ax + Ax^2)e^x - 2(6A + 6Ax + Ax^2)e^x \\ &\quad + 2(2A + 4Ax + Ax^2)e^x - 2(2Ax + Ax^2)e^x + Ax^2 e^x \\ &= 4Ae^x. \end{aligned}$$

Dies ergibt $A = \frac{1}{4}$ und damit

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 e^x.$$

Die allgemeine (inhomogene) Lösung $y(x)$ ist somit

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) + \frac{1}{4}x^2 e^x.$$

c) $y'' - y = \cosh(x), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-1}$

Lösung

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' - y &=& \cosh(x), \\ y(0) &=& 1, \\ y(1) &=& e^{-1}. \end{array} \right.$$

Die Funktion $\cosh(x)$ ist definiert als

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Deshalb betrachten wir wieder die separaten Differentialgleichungen

$$y'' - y = \frac{1}{2}e^x \tag{3}$$

und

$$y'' - y = \frac{1}{2}e^{-x}. \tag{4}$$

Zuerst lösen wir wieder das homogene Problem

$$y'' - y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -1.$$

Somit ist die allgemeine homogene Lösung $y_h(x)$ von (3) und (4)

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Wir suchen nun eine partikuläre Lösung von (3). Dazu machen wir den Ansatz

$$y_{p_1}(x) = Axe^x,$$

denn 1 ist einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Einsetzen in (3) liefert

$$\frac{1}{2}e^x = (2A + Ax)e^x - Axe^x = 2Ae^x.$$

Dies ergibt $A = \frac{1}{4}$ und damit

$$y_{p_1}(x) = \frac{1}{4}xe^x.$$

Wir suchen nun noch eine partikuläre Lösung von (4). Dazu machen wir den Ansatz

$$y_{p_2}(x) = Bxe^{-x},$$

denn -1 ist einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Einsetzen in (4) liefert

$$\frac{1}{2}e^{-x} = (-2B + Bx)e^{-x} - Bxe^{-x} = -2Be^{-x}.$$

Dies ergibt $B = -\frac{1}{4}$ und damit

$$y_{p_2}(x) = -\frac{1}{4}xe^{-x}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung $y(x)$ von $y'' - y = \cosh(x)$

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4}\left(xe^x - xe^{-x}\right) \\ &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x \sinh(x). \end{aligned}$$

Die Randbedingungen lauten

$$y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y(1) = e^{-1}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ e^{-1} &= C_1 e + C_2 e^{-1} + \frac{1}{4}\left(e - e^{-1}\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt $C_1 = -\frac{1}{4}$ und $C_2 = \frac{5}{4}$. Somit ist die gesuchte Lösung von dem Randwertproblem

$$y(x) = -\frac{1}{4} e^x + \frac{5}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} x \sinh(x).$$

Bemerkung: Um die partikuläre Lösung zu bestimmen, kann man auch den Ansatz

$$y_p(x) = Ax\cosh(x) + Bx\sinh(x)$$

machen.

d) $y' - 2y = x^2 e^{2x}, \quad y(0) = -3$

Lösung

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' - 2y = x^2 e^{2x}, \\ y(0) = -3. \end{cases}$$

Zuerst berechnen wir die homogene Lösung. Das charakteristische Polynom ist

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = \lambda - 2$$

mit der Nullstelle $\lambda = 2$. Also ist die homogene Lösung gegeben durch

$$y_h(x) = Ce^{2x}.$$

Wir machen nun den Ansatz der Variation der Konstanten

$$y_p(x) = C(x)e^{2x}.$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} C'(x)e^{2x} + C(x)2e^{2x} - 2C(x)e^{2x} &= x^2 e^{2x} \\ \Rightarrow C'(x) &= x^2 \end{aligned}$$

und folglich gilt

$$C(x) = \frac{x^3}{3} + C.$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 e^{2x} + Ce^{2x}.$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = -3$ folgt $C = -3$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit gegeben durch

$$y(x) = -3e^{2x} + \frac{1}{3}x^3 e^{2x}.$$

4. Eine Masse m, welche mit einer Feder der Federkonstante f verbunden ist und entlang der x-Achse reibungsfrei schwingt, wird durch eine sinusförmige äussere Kraft mit Frequenz ν angeregt. Die Auslenkung der Masse genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \sin(\nu t),$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$ die sogenannte Eigenfrequenz des Masse-Feder-Systems ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich die Masse an der Stelle $x = 0$ in Ruhe befinden: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega \neq \nu$ (keine Resonanz).

- **Lösung**
  Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + \omega^2$ der homogenen Differentialgleichung

  $$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

  hat Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung des homogenen Problems

  $$x_h(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t)$$

  ist. Der Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung hängt von ν ab.
- **Lösung**
  Wir machen den Ansatz

  $$x_p(t) = C\cos(\nu t) + D\sin(\nu t).$$

  Das liefert

  $$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= -\nu C\sin(\nu t) + \nu D\cos(\nu t), \\ \ddot{x}_p(t) &= -\nu^2 C\cos(\nu t) - \nu^2 D\sin(\nu t). \end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung $\ddot{x}+\omega^2 x = \sin(\nu t)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\sin(\nu t) &= -\nu^2 C\cos(\nu t) - \nu^2 D\sin(\nu t) + \omega^2(C\cos(\nu t) + D\sin(\nu t))\\ &= C(\omega^2-\nu^2)\cos(\nu t) + D(\omega^2-\nu^2)\sin(\nu t),\end{aligned}$$

d.h. $C = 0$ und $D = (\omega^2-\nu^2)^{-1}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2-\nu^2}\sin(\nu t).$$

Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ muss $A = 0$ sein. Mit der ersten Ableitung

$$\dot{x}(t) = \omega B\cos(\omega t) + \frac{\nu}{\omega^2-\nu^2}\cos(\nu t)$$

und $\dot{x}(0) = 0$ gilt ferner

$$B = -\frac{\nu}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega^2-\nu^2}.$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$x(t) = -\frac{\nu}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega^2-\nu^2}\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2-\nu^2}\sin(\nu t).$$

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega = \nu$ (Resonanz).
Lösung
Hier benötigen wir den Ansatz

$$x_p(t) = t\,(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)).$$

Das liefert

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) + t\,(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)),\\ \ddot{x}_p(t) &= 2(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)) + t\,(-\omega^2 C\cos(\omega t) - \omega^2 D\sin(\omega t)).\end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = \sin(\omega t)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\sin(\omega t) &= 2(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)) + t\,(-\omega^2 C\cos(\omega t) - \omega^2 D\sin(\omega t))\\ &\quad + \omega^2 t\,(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))\\ &= -2\omega C\sin(\omega t) + 2\omega D\cos(\omega t),\end{aligned}$$

d.h. $C = -\frac{1}{2\omega}$ und $D = 0$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t).$$

Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ muss $A = 0$ sein. Mit der ersten Ableitung

$$\dot{x}(t) = \omega B\cos(\omega t) - \frac{1}{2\omega}\cos(\omega t) + \frac{t}{2}\sin(\omega t)$$

und $\dot{x}(0) = 0$ gilt ferner

$$B = \frac{1}{2\omega^2}.$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t).$$

c) Skizzieren Sie die Ergebnisse aus **a)** und **b)** auf dem Zeitintervall $[0, 10\pi]$ für $\omega = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ bzw. $\omega = \nu = 1$. Was beobachten Sie?

Lösung

Abbildung 1 zeigt die berechneten Auslenkungen $x(t)$ für den Fall $\omega = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ (durchgehende Linie) bzw. $\omega = \nu = 1$ (gestrichelte Linie). Man erkennt, dass die Amplitude für $\omega \neq \nu$ beschränkt bleibt, wohingegen sie für $\omega = \nu$ mit der Zeit immer grösser wird. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer **Resonanzkatastrophe**. Aus mathematischer Sicht ist der Term $\frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)$ in der Lösung von Teilaufgabe **b)** für diesen Effekt verantwortlich.

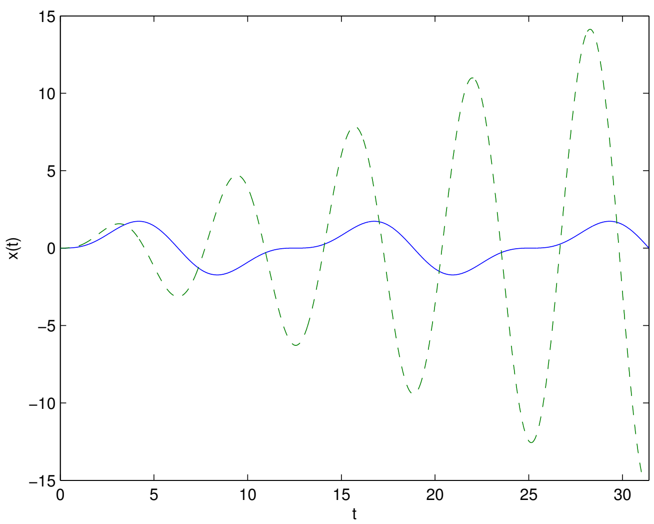

Figure 1: Auslenkungen $x(t)$ für $t \in [0, 10\pi]$

5. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) **Prüfungsaufgabe 5, Winter 2012.**

$$y''(x) + 2y'(x) = 3xe^x, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = 0.$$

- **Lösung**
  Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lässt sich bekanntlich schreiben als Summe

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

aus einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Das charakteristische Polynom des Problems lautet

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist daher gegeben durch

$$y_h(x) = A + Be^{-2x}.$$

Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = (\alpha x + \beta)e^x.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \alpha e^x + (\alpha x + \beta)e^x = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x, \\ y_p''(x) &= \alpha e^x + (\alpha x + \alpha + \beta)e^x = (\alpha x + 2\alpha + \beta)e^x. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$3xe^x \overset{!}{=} y_p''(x) + 2y_p'(x) = (3\alpha x + 4\alpha + 3\beta)e^x$$

und ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} 3\alpha &= 3 \\ 4\alpha + 3\beta &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\alpha = 1 \quad \text{und} \quad \beta = -\frac{4}{3}.$$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = A + Be^{-2x} + \left(x - \frac{4}{3}\right)e^x$$

und

$$y'(x) = -2Be^{-2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x.$$

Nun müssen wir noch die Konstanten A und B so bestimmen, dass die gegebenen Anfangsbedingungen $y(0) = \frac{4}{3}$ und $y'(0) = 0$ erfüllt sind. Dies ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} A + B - \tfrac{4}{3} &= \tfrac{4}{3} \\ -2B - \tfrac{1}{3} &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$A = \frac{17}{6} \quad \text{und} \quad B = -\frac{1}{6}.$$

Damit erhalten wir insgesamt als Lösung des gestellten Anfangswertproblems

$$y(x) = \frac{17}{6} - \frac{1}{6}e^{-2x} + \left(x - \frac{4}{3}\right)e^x.$$

- **Lösung**

  Alternative Lösung:

  Zunächst reduzieren wir das gegebene Anfangswertproblem mit Hilfe der Substitution $y' =: z$ auf das Problem

  $$z'(x) + 2z(x) = 3xe^x, \quad z(0) = 0 \tag{5}$$

  erster Ordnung. Anschliessend lösen wir das zugehörige homogene Problem

  $$z'(x) + 2z(x) = 0.$$

  Dessen charakteristische Gleichung lautet $\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$ und somit erhalten wir die allgemeine homogene Lösung $z_h(x) = Ce^{-2x}$. Für die Lösung des inhomogenen Problems (5) machen wir daher den Ansatz $z(x) = C(x)e^{-2x}$ (Variation der Konstanten). Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichung (5) liefert

  $$\begin{aligned} & 3xe^x \overset{!}{=} C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = C'(x)e^{-2x} \\ \Leftrightarrow \quad & C'(x) = 3xe^{3x}. \end{aligned}$$

  Daraus erhalten wir $C(x)$ durch (partielle) Integration:

  $$C(x) = \int \underbrace{3x}_{\downarrow} \underbrace{e^{3x}}_{\uparrow} \,\mathrm{d}x = xe^{3x} - \int e^{3x} \,\mathrm{d}x = xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C_2.$$

  Die allgemeine Lösung lautet damit

  $$z(x) = \left(xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C_2\right)e^{-2x} = xe^x - \frac{1}{3}e^x + C_2e^{-2x}.$$

  Aus der Anfangsbedingung $z(0) = 0$ folgt schliesslich

  $$0 \overset{!}{=} z(0) = -\frac{1}{3} + C_2,$$

  also $C_2 = \frac{1}{3}$ und damit

  $$z(x) = xe^x - \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-2x}.$$

  Wegen $z(x) = y'(x)$ erhalten wir $y(x)$ durch Integration von $z(x)$. Den Term xe^x behandeln wir mit partieller Integration:

  $$\int \underbrace{x}_{\downarrow} \underbrace{e^x}_{\uparrow} \,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \,\mathrm{d}x = xe^x - e^x.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= \int z(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(xe^x - \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-2x} \right) \mathrm{d}x \\ &= xe^x - e^x - \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{6}e^{-2x} + C_3. \end{aligned}$$

Die Konstante C_3 bestimmen wir aus der Anfangsbedingung $y(0) = \frac{4}{3}$:

$$\frac{4}{3} \stackrel{!}{=} y(0) = -1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + C_3,$$

also $C_3 = \frac{17}{6}$. Insgesamt ist die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems also

$$y(x) = xe^x - \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{17}{6},$$

was natürlich wieder dasselbe ist wie mit dem ersten Lösungsweg.

b) **Prüfungsaufgabe 5, Sommer 2012.**

$$y'(x) \cdot (x+1) + y(x) = x^3, \quad y(0) = \sqrt{5}\ .$$

Lösung

Homogene Lösung:

Die homogene Gleichung

$$y'(x)(x+1) + y(x) = 0$$

lösen wir mit Separation der Variablen und erhalten

$$\begin{aligned} \tfrac{y'(x)}{y(x)} &= \tfrac{-1}{x+1} \\ \Leftrightarrow \quad \textstyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\textstyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \\ \Leftrightarrow \quad \ln|y| &= -\ln|x+1| + C \\ \Leftrightarrow \quad y_h(x) &= \tfrac{C_2}{x+1}\ , \qquad \text{mit } C_2 = \pm e^C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ . \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung:

Variante 1:

Ansatz:

$$y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Einsetzen liefert

$$(3ax^2 + 2bx + c)(x+1) + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{cases} 3a + a &= 1\ , \\ 3a + 2b + b &= 0\ , \\ 2b + c + c &= 0\ , \\ c + d &= 0\ . \end{cases}$$

Daraus folgt $a = c = \frac{1}{4}$, $b = d = -\frac{1}{4}$ und damit

$$y_p(x) = \frac{1}{4}(x^3 - x^2 + x - 1).$$

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C_2}{x+1} + \frac{1}{4}(x^3 - x^2 + x - 1) \ .$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = \sqrt{5}$ sagt, dass $C_2 = \sqrt{5} + \frac{1}{4}$ sein muss.
Somit ist die einzige Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{1}{4}(x^3 - x^2 + x - 1) \ .$$

Variante 2:
Mit Variation der Konstanten wählen wir den Ansatz

$$y(x) = \frac{C_2(x)}{x+1}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} x^3 &= \left(\frac{C_2'(x)}{x+1} - \frac{C_2(x)}{(x+1)^2}\right)(x+1) + \frac{C_2(x)}{x+1} \\ &= C_2'(x), \end{aligned}$$

also $C_2(x) = \frac{x^4}{4} + C_3$. Die allgemeine Lösung ist somit gegeben durch

$$y(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C_3\right)\frac{1}{x+1}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = \sqrt{5}$ sagt, dass $C_3 = \sqrt{5}$ sein muss. Somit ist die einzige Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \left(\frac{x^4}{4} + \sqrt{5}\right)\frac{1}{x+1}.$$

Bemerkung: Variante 1 und 2 ergeben das gleiche Resultat, da

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^4}{4} + \sqrt{5}\right)\frac{1}{x+1} &= \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4 - 1 + 1}{4(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{x^4 - 1}{4(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1)}{4(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{1}{4}(x^3 - x^2 + x - 1). \end{aligned}$$