Serie 14

1. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der folgenden homogenen Differentialgleichungen. Falls zusätzlich Anfangsbedingungen angegeben sind, bestimmen Sie darüber hinaus die entsprechenden speziellen Lösungen.

a) $y'' + 2y' - 35y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 3$

Lösung

Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 + 2\lambda - 35 = (\lambda + 7)(\lambda - 5)$ und besitzt die beiden voneinander verschiedenen Nullstellen $\lambda_1 = -7$ und $\lambda_2 = 5$. Die allgemeine Lösung ist daher gegeben durch

$$y(x) = Ae^{-7x} + Be^{5x}.$$

Um die spezielle Lösung zu erhalten, müssen wir A und B so bestimmen, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B \overset{!}{=} 3, \\ y'(0) &= -7A + 5B \overset{!}{=} 3. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten A und B. Seine Lösung lautet $A = 1$, $B = 2$. Als spezielle Lösung der Differentialgleichung ergibt sich damit

$$y(x) = e^{-7x} + 2e^{5x}.$$

b) $\frac{y''}{4} - 3y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

Lösung

Das charakteristische Polynom

$$\frac{1}{4}\lambda^2 - 3\lambda + 9 = \frac{1}{4}(\lambda^2 - 12\lambda + 36) = \frac{1}{4}(\lambda - 6)^2$$

hat eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = 6$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = Ae^{6x} + Bxe^{6x}.$$

Die Anfangsbedingungen legen A und B eindeutig fest:

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B \cdot 0 = 2 && \Rightarrow\ A = 2 \\ y'(0) &= 6A + B = 0 && \Rightarrow\ B = -12. \end{aligned}$$

Die spezielle Lösung der Differentialgleichung lautet damit

$$y(x) = 2\,e^{6x} - 12\,xe^{6x}.$$

c) $y^{(4)} - 16y = 0$
Lösung
Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^4 - 16 = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$$

mit den 4 verschiedenen Nullstellen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2i$ und $\lambda_4 = -2i$. Die allgemeine Lösung ist damit gegeben durch

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + Ce^{2xi} + De^{-2xi}$$

oder

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + \tilde{C}\cos(2x) + \tilde{D}\sin(2x)$$

oder

$$y(x) = \tilde{A}\cosh(2x) + \tilde{B}\sinh(2x) + \tilde{C}\cos(2x) + \tilde{D}\sin(2x).$$

Die beiden letzteren Formulierungen haben den Vorteil, dass sie für reelle Koeffizienten jeweils reelle Funktionen repräsentieren.

d) $9y^{(4)} - 16y'' = 0$
Lösung
Das charakteristische Polynom

$$9\lambda^4 - 16\lambda^2 = 9\lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{16}{9}\right) = 9\lambda^2\left(\lambda - \frac{4}{3}\right)\left(\lambda + \frac{4}{3}\right)$$

besitzt eine doppelte Nullstelle $\lambda_{1,2} = 0$ sowie einfache Nullstellen $\lambda_3 = \frac{4}{3}$ und $\lambda_4 = -\frac{4}{3}$. Die allgemeine Lösung lautet deshalb

$$y(x) = A + Bx + Ce^{-\frac{4}{3}x} + De^{\frac{4}{3}x}.$$

2. *(Randwertprobleme.)* Im Gegensatz zu Anfangswertproblemen, wo man Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ vorgibt, sind bei Randwertproblemen Bedingungen für die Lösung am Rande des Ortsintervalls vorgeschrieben. Im Folgenden wollen wir als Beispiel dazu den eindimensionalen Fall der stationären Wärmeleitungsgleichung betrachten.

Wir nehmen an, dass ein homogener Draht der Länge L durch eine Heizung $q(x)$ auf zeitlich konstanter, aber örtlich variabler Temperatur $u(x)$ gehalten wird. Die Wärme kann sich einerseits in Drahtrichtung ausgleichen, andererseits wird die Wärme $\gamma u(x)$ an die Umgebung abgestrahlt. Dann genügen die Grössen folgender Gleichung

$$k\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} - \gamma u(x) + q(x) = 0,$$

wobei die Konstante k vom Material des Drahtes abhängt. Wir nehmen im folgenden $k = 1$ an. Der Draht habe Länge $L = 10$ und sei mit dem Intervall $[0, 10]$ identifiziert.

a) Der Draht sei vollständig isoliert ($\gamma = 0$) und wird auf dem Bereich $[3,7]$ mit einer konstanten Leistung $q(x) = 5$ erhitzt. Die beiden Enden haben Umgebungstemparatur $u(0) = u(10) = 20$. Berechnen Sie die Temparaturverteilung $u(x)$.

Lösung

Wir lösen die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x) = 0$$

für die gegebenen Nebenbedingungen. Durch Integration erhalten wir

$$u'(x) = -\int_0^x q(\hat{x})\,\mathrm{d}\hat{x} + C_1$$

Für $x < 3$ ist $q(x) = 0$ und folglich $\int_0^x q(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} = 0$. Für $x \in [3,7]$ gilt

$$\int_0^x q(\hat{x})\,\mathrm{d}\hat{x} = \int_0^3 0\,\mathrm{d}\hat{x} + \int_3^x 5\,\mathrm{d}\hat{x} = 5(x-3)$$

und für $x > 7$ haben wir

$$\int_0^x q(\hat{x})\,\mathrm{d}\hat{x} = \int_0^3 0\,\mathrm{d}\hat{x} + \int_3^7 5\,\mathrm{d}\hat{x} + \int_7^x 0\,\mathrm{d}\hat{x} = 20.$$

Wir erhalten also

$$u'(x) = \begin{cases} C_1, & x < 3, \\ -5(x-3) + C_1, & 3 \le x \le 7, \\ -20 + C_1, & x > 7, \end{cases}$$

und folglich

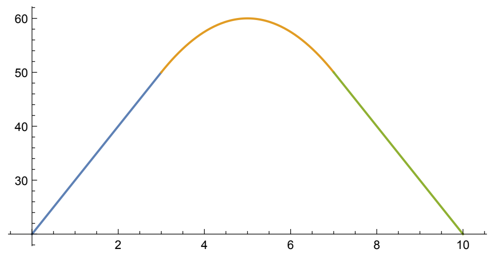
$$u(x) = \int_0^x u'(\hat{x})\,\mathrm{d}\hat{x} + C_2 = \begin{cases} C_1 x + C_2, & x < 3, \\ -5\frac{(x-3)^2}{2} + C_1 x + C_2, & 3 \le x \le 7, \\ -40 - 20(x-7) + C_1 x + C_2, & x > 7. \end{cases}$$

Die Konstanten können wir nun mit Hilfe der Randbedingungen bestimmen.

$$\begin{aligned} u(0) &= C_2 = 20 \\ u(10) &= -100 + 10C_1 + 20 = 20 \qquad\qquad \Rightarrow C_1 = 10. \end{aligned}$$

Die Temperaturverteilung im Draht ist also gegeben durch

$$u(x) = \begin{cases} 20 + 10x, & x < 3, \\ 60 - \frac{5}{2}(x-5)^2, & 3 \le x \le 7, \\ 120 - 10x, & x > 7. \end{cases}$$



b) Der Draht strahlt gleichmässig Wärme ab ($\gamma = 4$) und werde durch eine Heizung mit $q(x) = \cos(x)$ erhitzt. Die beiden Drahtenden seien isoliert ($u'(0) = u'(10) = 0$). Berechnen Sie die Temparaturverteilung $u(x)$.

Lösung

Die Differentialgleichung lautet in diesem Fall

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} - 4u(x) = -\cos(x).$$

Wir erhalten die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 4 = 0$ und schliessen daraus, dass die homogene Gleichung durch $u_{\text{hom}} = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ gegeben ist. Für die spezielle Lösung versuchen wir den Ansatz $u(x) = C\sin(c) + D\cos(x)$. Eingesetzt in die Gleichung ergibt dies

$$\begin{aligned} -C\sin(x) - D\cos(x) - 4C\sin(x) - 4D\cos(x) &= -\cos(x) \\ 5C\sin(x) + 5D\cos(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = 0, D = \tfrac{1}{5}.$$

Die allgemeine Löesung ist somit gegeben durch

$$u(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + \frac{1}{5}\cos(x).$$

Wir berechnen

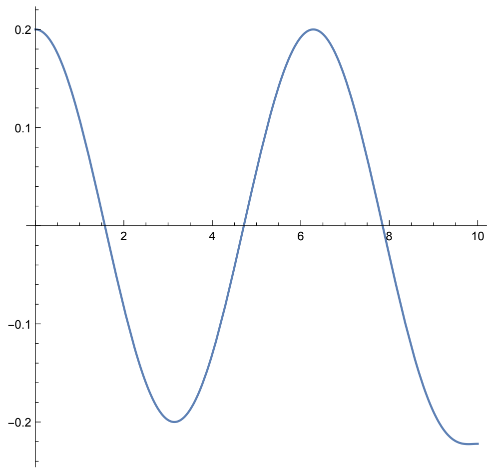
$$u'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x} - \frac{1}{5}\sin(x)$$

und erhalten mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} u'(0) &= 2A - 2B = 0 & &\Rightarrow A = B \\ u'(10) &= 2Ae^{20} - 2Ae^{-20} - \frac{1}{5}\sin(10) & & \\ \Rightarrow A &= \frac{\sin(10)}{10(e^{20} - e^{-20})} = \frac{\sin(10)}{20\sinh(20)} & &\approx -1.12 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt dies

$$u(x) = \frac{1}{5}\cos(x) + 2A\cosh(2x) = 0.2\cos(x) - 2.24 \cdot 10^{-10}\cosh(2x).$$



3. *(Potenzreihenansatz.)* Lösen Sie folgende Differenzialgleichungen mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

a) Finden Sie die allgemeine Lösung von $y''(x) = y(x)$.
Lösung
Der Ansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ liefert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir also $a_{k+2} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)}$. Mit vollständiger Induktion können wir nun folgende explizite Darstellung beweisen.

$$a_k = \begin{cases} \frac{a_0}{k!}, & k \text{ gerade} \\ \frac{a_1}{k!}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Somit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = a_0 \cosh(x) + a_1 \sinh(x).$$

Dies ist genau die Lösung, die wir auch hätten erraten können.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(1-x)^2 y''(x) - (1-x)y'(x) - y(x) = 0$$

für $y(0) = 2, y'(0) = 0$.
Lösung

Mit dem Ansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ erhalten wir

$$(1-x)^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k a_{k+1}x^k + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$k=0 \qquad 2a_2 - a_1 - a_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = \frac{a_1 + a_0}{2}, \tag{1}$$
$$k=1 \qquad 6a_3 - 6a_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_3 = a_2, \tag{2}$$

und für $k \geq 2$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - (2k+1)(k+1)a_{k+1} + (k-1)(k+1)a_k = 0 \tag{3}$$
$$\Rightarrow \quad a_{k+2} = \frac{(2k+1)a_{k+1} - (k-1)a_k}{k+2}. \tag{4}$$

Durch vollständige Induktion zeigen wir nun $a_{k+1} = a_k$ für $k \geq 2$. Die Verankerung liefert Gleichung (2). Mit $a_{k+1} = a_k$ folgt nun der Induktionsschritt aus Gleichung (4)

$$a_{k+2} = \frac{(2k+1)a_{k+1} - (k-1)a_k}{k+2} = \frac{(2k+1)-(k-1)}{k+2} a_{k+1} = a_{k+1}.$$

Folglich erhalten wir die allgemeine Lösung $y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_0+a_1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} x^k$. Die Anfangsbedingungen liefern $a_0 = 2, a_1 = 0$ und somit gilt

$$y(x) = 2 + \sum_{k=2}^{\infty} x^k = 2 + \frac{x^2}{1-x}.$$

4. Prüfungsaufgabe 3, Sommer 2014. Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) - y'(x) = 0,$$

wobei $y^{(4)}(x)$ die vierte Ableitung von y nach x bezeichnet und bestimmen Sie daraus alle Lösungen, welche

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

erfüllen.

Lösung
Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 - \lambda = \lambda(\lambda^3 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \stackrel{!}{=} 0.$$

Daraus folgt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Die reellen Fundamentallösungen sind also

$$1,\ e^x,\ e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right),\ e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right).$$

Für $x \to \infty$ gilt $e^x \to \infty$ und $e^{-\frac{1}{2}x} \to 0$, die Bedingung $\lim_{x\to\infty} y(x) = 2$ impliziert also $C_1 = 2$ und $C_2 = 0$, also

$$y(x) = 2 + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right).$$

Die Bedingung $y(0) = 1$ ergibt

$$1 = y(0) = 2 + C_3 \quad \Leftrightarrow \quad C_3 = -1,$$

also

$$y(x) = 2 + e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right).$$

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} y'(x) \quad &= \quad -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right) \end{aligned}$$

und damit ergibt die Bedingung $y'(0) = 0$

$$0 = y'(0) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} C_4 \quad \Leftrightarrow \quad C_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Damit erhalten wir die eindeutige Lösung

$$y(x) = 2 - e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right).$$