Serie 1

1. Beschreiben und zeichnen Sie das Niveaulinienportrait folgender Funktionen.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := \frac{x^2}{4} + y^2$
b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) := xy$
c) $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto h(x, y) := \frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}$

2. Bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen.

a) f_{xyz} und f_{yzz}, wobei $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$
b) f_{rss} und f_{rst}, wobei $f(r, s, t) = r \ln(rs^2t^3)$
c) $\frac{\partial^3 z}{\partial u\, \partial v\, \partial w}$ für $z = u\sqrt{v - w}$
d) alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von

$$w(x, y, z) = \sinh(y + e^{x+z})$$

3. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Fläche $z = \sqrt{y - x}$ im Punkt $P = (1, 2, 1)$.

4. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4y$.

a) Veranschaulichen Sie f mit Hilfe der Schnitte

$$S_{x=x_0}, x_0 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad \text{und} \quad S_{y=y_0}, y_0 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

b) Skizzieren Sie die Niveaulinien.
c) Skizzieren Sie die Fläche, welche von $f(x, y)$ beschrieben wird.
d) Bestimmen Sie einen Punkt (x_*, y_*), so dass die Tangentialebene an den Punkt $(x_*, y_*, f(x_*, y_*))$ parallel zur (x, y)-Ebene liegt.
e) Wo durchstösst die Verlängerung der Flächennormalen durch $(1, 2, f(1, 2))$ die (x, y)-Ebene?

5. *(Die Wellengleichung)* Wenn Sie vom Meeresufer aus eine Momentaufnahme der Wellen machen, zeigt das Bild ein regelmässiges Muster aus Bergen und Tälern zu einem festen Zeitpunkt. Sie beobachten die periodische vertikale Bewegung im Raum als Funktion des Ortes. Wenn Sie sich ins Wasser stellen, können Sie fühlen, wie sich das Wasser mit den vorbeilaufenden wellen hebt und senkt. Sie beobacheten damit die periodische vertikale Bewegung in der Zeit. In der Physik wird diese wunderbare Symmertie durch die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1}$$

beschrieben. Dabei ist $w = w(x, t)$ die Höhe der Welle, x die Ortsvariable, t die Zeit und c die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellen ausbreiten.

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Lösungen der Wellengleichung (1) sind.

a) $w(x,t) = \sin(x+ct)$

b) $w(x,t) = \sin(x+ct) + \cos(2x+2ct)$

c) $w(x,t) = \ln(2x+2ct)$

d) $w(x,t) = \tan(2x-2ct)$

e) $w(x,t) = f(u)$. Dabei ist f eine differnzierbare Funktion von u und $u = a(x+ct)$ mit der Konstanten a.

6. *(Cobb-Douglas-Funktion)* Mit der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion lässt sich die Produktion eines wirtschaftlichen Systems in Abhängigkeit der Arbeit L und des Kapitals K berechnen. Wir betrachten den Fall

$$Q(L,K) = cL^aK^b \tag{2}$$

mit $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ and $c = 1$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen Q_L und Q_K.

b) Zeichnen Sie die Niveaulinien der Produktionsfunktion im ersten Quadrant der LK-Ebene für $Q = 1,2,3$.