

Serie 2

1. (*Wilson'sche Formel*)

Die Wilson'sche Formel in der Warenwirtschaft besagt, dass für ein Lager die Bestellmenge Q einer Ware durch die Formel

$$Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}} \quad (1)$$

gegeben ist. Dabei steht K für die Bestellkosten, M für die pro Woche verkaufte Stückzahl und h sind die wöchentlichen Lagerkosten pro Stückzahl. Gegenüber welcher der Variablen K, M und h ist Q in der Nähe des Punkts $(K_0, M_0, h_0) = (2, 20, 0.05)$ am empfindlichsten?

2. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x, y) = x e^y$$

im Punkt $(1, 0)$. Vergleichen Sie die Werte von Taylorpolynom und f an der Stelle $(0.9, 0.1)$.

3. a) Sei $x(t) = \cos(\pi t)$ und $y(t)$ diejenige Stammfunktion von e^{-t^2} , welche an der Stelle $t = 1$ den Wert 42 annimmt. Weiterhin sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie die Ableitung

$$\left. \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) \right|_{t=1}$$

der Funktion $t \mapsto f(x(t), y(t))$ im Punkt $t = 1$.

b) Gegeben sei die Gleichung

$$F(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy + y^4} - 3 = 0.$$

Fassen Sie die Koordinate y in der Umgebung des Punktes $P = (0, \sqrt{3})$ als Funktion von x auf, $y = \phi(x)$, und berechnen Sie die Ableitung $\phi'(0)$.

4. Bestimmen Sie jeweils die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle P in Richtung v für die folgenden Beispiele.

a) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2$, $P = (3, 3)$, $v = (-1, -3)^T$;

b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $P = (3, 0)$, $v = (1, -1)^T$;

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $P = (3, 0, 4)$, $v = (1, 1, 1)^T$.

5. a) Ein Berg sei beschrieben durch die Funktion

$$h(x, y) = 6000 e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{y^2}{900}},$$

wobei die positive x -Achse nach Osten orientiert ist und die positive y -Achse nach Norden. In Position $(7, 6, h(7, 6))$ steht ein Mann. Wie gross ist die Steigung / das Gefälle, wenn der Mann seinen Standort Richtung Nordosten bzw. Westen verlässt?

- b) Ein höhenkranker Wanderer befindet sich in Position $(1, 6)$. Der Wanderer folgt stets der Richtung des steilsten Abstiegs, um möglichst schnell Höhe zu verlieren. Zeigen Sie, dass die "Falllinie" des Wanderers durch die folgende Gleichung

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2}{x}$$

beschrieben ist. Eine solche Gleichung mit Ableitungen nennen wir Differenzialgleichung.

- c) Zeigen Sie, dass der Weg des Wanderers durch die Funktion $y(x) = 6x^2$ beschrieben wird.
- d) Bestimmen Sie, wo der Wanderer eine Höhe von unter 4000 m erreicht. Für die numerische Lösung können Sie einen Taschenrechner mit Standardrechenoperationen verwenden.
- e) Ein Wanderer befindet sich irgendwo im Nebel – auf einem Berg, dessen Höhenfunktion wir nicht kennen. Er möchte schnellstmöglich ins Tal. Alles, was er weiss, ist, dass der Weg Richtung Osten 25 % Steigung hat und Richtung Nordwesten 35 % Gefälle. In welche Richtung muss er gehen und wie steil ist es da?