Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

Serie 3

1. a) Zeigen Sie, dass der Graph von $f(x,y) = \sqrt{9-(x-2)^2-(y-3)^2}$ eine Halbkugel beschreibt und bestimmen Sie ihren Radius und ihr Zentrum.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene in $P = (3, 1, f(3, 1))$.

c) Beschreiben Sie die Niveaufläche $F(x,y,z) = 9$ für die Funktion $F(x,y,z) = x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 + 13$.

d) Sei $Q = (3, 1, 2)$ ein Punkt auf der Niveaufläche aus **c)**. Bestimmen Sie die Tangentialebene in Q und vergleichen Sie Ihre Antwort mit **b)**. Was stellen Sie fest?

2. Prüfungsaufgabe 6, Sommer 2012. Sei S die Fläche des Graphen von $f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$.

a) Bestimmen Sie die Tangentialebene Σ zur Fläche S im Punkt $P = (0, 0, 10)$.

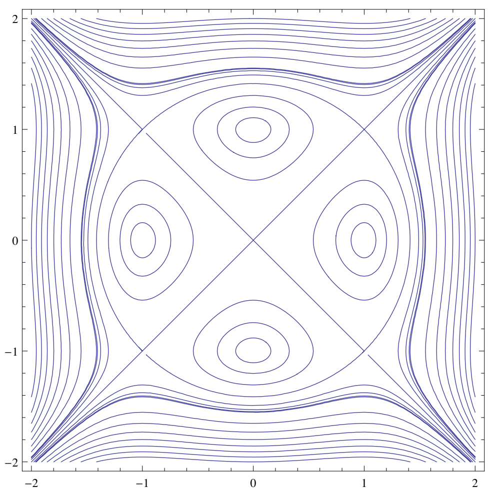
b) Die Temperatur an der Stelle (x, y, z) ist gegeben durch

$$T(x,y,z) = x^2y + y^2z + 4x + 14y + z.$$

Wir befinden uns im Punkt P. In welche Richtung müssen wir uns auf der Fläche S bewegen, damit die Temperatur am schnellsten steigt?

3. Das folgende Bild zeigt einige Niveaulinien der Funktion

$$f(x,y) = 2x^2 - x^4 - 2y^2 + y^4$$



a) Lokalisieren Sie anhand des Bildes kritische Punkte (ohne Rechnung). Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um einen Sattelpunkt bzw. um ein Minimum/Maximum handelt. Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Untersuchen Sie sämtliche kritischen Punkte rechnerisch. Entscheiden Sie jeweils anhand der zweiten Ableitungen von f, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

c) Untersuchen Sie die Funktion

$$g(x, y) = e^{4y-x^2-y^2}$$

auf Minima, Maxima und Sattelpunkte.

4. *(Zwei Berge ohne Sattel.)*

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion zwei lokale Maximas besitzen, jedoch keine weiteren kritische Punkte.

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2 - e^y)^2.$$

Skizzieren Sie den Graphen.

5. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = 4 + x^4 + 3y^4.$$

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

b) Berechnen Sie die Hessematrix in diesen Punkten. Können Sie damit die Art der kritischen Punkte folgern?

c) Charakterisieren Sie die kritischen Punkte.

6. Bestimmen Sie drei Zahlen mit der Summe 9, für welche die Summe der Quadrate minimal ist. Interpretieren Sie dieses Resultat geometrisch.