Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

Serie 6

1. Wir betrachten drei verschiedene Flaschen in der Form eines Paraboloids P, eines Hyperboloids H und eines Kegels K. Diese sind wie folgt gegeben:

- $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2 + y^2,\, 0 \leq z \leq 4\}$,
- $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = \sqrt{1 + x^2 + y^2},\, 1 \leq z \leq 5\right\}$,
- $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = \sqrt{x^2 + y^2},\, 0 \leq z \leq 4\right\}$.

a) Alle drei Flaschen haben Höhe 4 vom Boden der Flasche aus gemessen. Welche fasst am meisten Wasser, wenn man sie bis zum Rand füllt?

b) Welche Höhe müssten P respektive K mindestens haben, um das Wasser der gefüllten Flasche H $(1 \leq z \leq 5)$ fassen zu können?

2. a) Berechnen Sie das Volumen des Körpers K, welcher von der Sphäre

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 19\}$$

und dem Hyperboloid

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z^2 - x^2 - y^2 = 1,\, z > 0\}$$

eingeschlossen wird.

b) Wir betrachten ein Stück Käse, welches im ersten Oktanten liegt (d.h. $x > 0\,, y > 0,\, z > 0$) und von den Ebenen $y = z$, $y = 4$, $x = 4$ begrenzt wird. Das Stück Käse könnten wir halbieren, indem wir es mit der Ebene $x = 2$ schneiden. Wir möchten es jedoch mit Hilfe einer Ebene $y = a$, $0 < a < 4$ halbieren. Finden Sie dieses a!

3. Bestimmen Sie in der Formel

$$\iiint_B f(x,y,z)\, \mathrm{d}V(x,y,z) = \int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f(x,y,z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

die durch ... angedeuteten Integrationsgrenzen f"ur die folgenden Gebiete B:

a) B ist der durch die Fl"achen $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$ begrenzte Zylinder.

b) B ist der durch die Fl"achen $x^2 + y^2 = R^2$, $x + y + z = 0$, $x + y + z = 1$ begrenzte, schief abgeschnittene Zylinder.

c) B ist der durch die Fl"achen $x = 2z$, $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$ begrenzte, schief abgeschnittene Kreiskegel.

4. Prüfungsaufgabe 5, Winter 2016. Berechnen Sie die Masse der Region, die durch

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \quad y \geq x, \quad z \geq 0$$

definiert ist, mit der Dichtefunktion $\rho(x,y,z) = \sqrt{2}(y - x)$.

5. **Prüfungsaufgabe, D-INFK, Winter 2008.** Bestimmen Sie das Volumen der Eistüte, welche durch den Kegel $x^2 + y^2 = 3z^2$ und die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ beschränkt wird und oberhalb der xy-Ebene steht.

6. **Prüfungsaufgabe 5, Sommer 2015.** Bestimmen Sie den Schwerpunkt der homogenen Fläche rechts von der Geraden $x = 2$, welche durch den Kreis $x^2 + y^2 = 16$ begrenzt wird.

7. Eine Dichtefunktion sei gegeben durch $\rho(r, \phi, \theta) = 1 + \frac{r}{4}$. Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \text{ und } z \geq 0\big\}$.

8. **Prüfungsaufgabe 9, D-MAVT, Sommer 2013.** Eine inhomogene Kugel mit Radius R und mit Massendichte

$$\rho(r) = 1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

wobei r der Abstand vom Mittelpunkt bezeichnet, rotiert um eine Achse durch den Mittelpunkt.

a) Berechnen Sie die Masse der Kugel.

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der Rotationsachse.