Serie 7

1. Prüfungsaufgabe 6, Sommer 2014. Gegeben sei das Gebiet

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r_0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2,\, y \geq 0\right\}$$

mit konstanter Dichte $\rho \equiv 1$.

a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von G für $r_0 = 1$.

b) Sei $r_0 \in (0,2)$ der grösste Wert, so dass der Schwerpunkt von G in G liegt. Finden Sie eine quadratische Gleichung $r_0^2 + pr_0 + q = 0$ zur Bestimmung von r_0.

c) Bestimmen Sie r_0.

2. Gegeben sei der Bereich B, welcher von den Hyperbeln $xy = 1$ und $xy = 4$ sowie den Linien $\frac{y}{x} = 1$ und $\frac{y}{x} = 3$ begrenzt wird. Bestimmen Sie

$$\iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}A$$

und skizzieren Sie den Bereich B vor und nach der Koordinatentransformation.

a) $f(x,y) = e^{xy}$ und

b) $f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}$.

3. Eine dünne Platte P mit konstanter Dichte $\rho(x,y) = 1$ liegt in der xy-Ebene und ist dort von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit $a, b > 0$ berandet. Berechnen Sie das polare Trägheitsmoment der Platte.

4. Finden Sie jeweils ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ im $\mathbb{R}^2$, welches die folgenden Bedingungen erfüllt. Die Lösungen sind dabei nicht eindeutig. Fertigen Sie jeweils auch eine Skizze an!

a) $\mathbf{F}$ ist überall senkrecht zur Geraden $x = 2$.

b) $\mathbf{F}$ ist überall senkrecht zur Geraden $x = y$.

c) $\mathbf{F}$ fliesst im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung und nimmt betragsmässig mit dem Abstand zum Ursprung zu.

d) $\mathbf{F}$ hat in allen Punkten, ausser dem Ursprung, Einheitslänge und zeigt radial vom Ursprung weg.