

Serie 8

1. Auf dem Rand der Ellipse

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$$

steht ein Zaun der Höhe $H(x, y) = \sqrt{36 + \frac{16}{9}y^2}$. Seine Aussenseite soll gestrichen werden. Stellen Sie ein Integral zur Berechnung der zu streichenden Fläche A auf und berechnen Sie den exakten Wert von A .

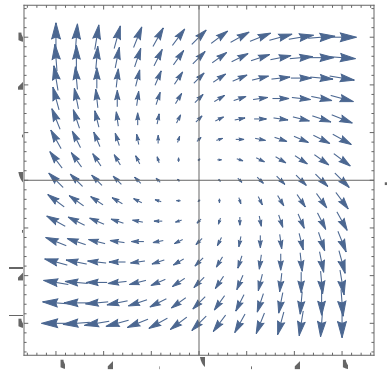
2. Bestimmen Sie die Masse eines dünnen Drahts, der entlang der Kurve C , gegeben durch

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}t \\ \sqrt{2}t \\ 4 - t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

liegt, wenn seine Dichte gegeben ist durch

- a) $\rho = 3t$,
- b) $\rho = 1$.

3. Ein kreisförmiger Draht mit konstanter Dichte ρ liegt auf dem Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ in der xy -Ebene. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Drahts um die z -Achse.
4. Berechnen Sie für das Vektorfeld



$$\mathbf{F} : (x, y) \mapsto (x + y, y - x)$$

die Arbeit entlang der folgenden Wege C , wobei $P = (0, 5)$ und $Q = (0, -5)$:

- a) gerade Verbindung von P nach Q
- b) Halbkreisbogen um $(0, 0)$ von P nach Q , gegen den Uhrzeigersinn orientiert;
- c) gerade Verbindung von $(-5, 2)$ nach $(5, 2)$;

d) gerade Verbindung von $(-5, -3)$ nach $(5, -3)$.

5. In Abbildung 1 und 2 sind die folgenden Vektorfelder und geschlossenen Kurven skizziert, welche wir in dieser Aufgabe betrachten wollen:

$$\mathbf{F} = (y^3, x^3 - 2y), \quad C : \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y), \quad \Gamma \text{ ist der Rand des Quadrats mit Eckpunkten } (\pm 2, \pm 2) \text{ im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.}$$

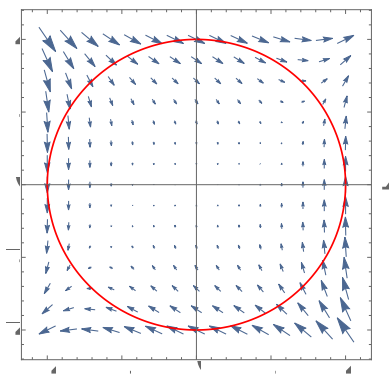


Figure 1: \mathbf{F} und die Kurve C

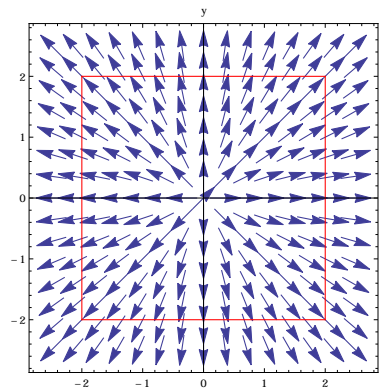


Figure 2: \mathbf{G} und die Kurve Γ

- Stellen Sie anhand der Skizzen eine Vermutung auf, ob die Zirkulation von \mathbf{F} entlang C und \mathbf{G} entlang Γ positiv, negativ oder gleich Null ist.
 - Berechnen Sie jeweils die Zirkulation und interpretieren Sie das Resultat.
 - Stellen Sie anhand der Skizzen eine Vermutung auf, ob der Fluss nach aussen von \mathbf{F} durch C und \mathbf{G} durch Γ positiv, negativ oder gleich Null ist.
 - Berechnen Sie jeweils den Fluss nach aussen und interpretieren Sie das Resultat.
6. Untersuchen Sie folgende Gebiete jeweils auf die Eigenschaften zusammenhängend und einfach zusammenhängend:

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$;
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$;
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$;
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ oder } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.