Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

Serie 9

1. Berechnen Sie auf zwei Arten (direkt und mit Hilfe des Satzes von Green) das Linienintegral

$$\int_{\partial D} xy\,\mathrm{d}x + x^2y^3\,\mathrm{d}y,$$

wobei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,2)$ ist.

2. Skizzieren Sie die Fläche unter einem Bogen der Zykloide

$$r(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

und benutzen Sie den Satz von Green, um diese Fläche zu ermitteln.

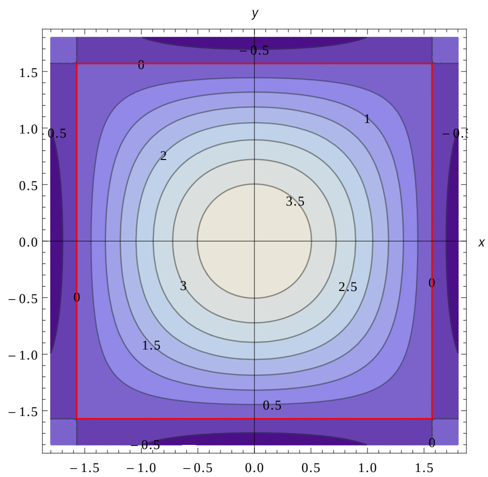
3. Wir betrachten folgendes Modell für einen zwei-dimensionalen Ozean: Dieser sei gegeben durch das Quadrat

$$R = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

mit Rand C. Eine Strömungsfunktion sei auf R gegeben durch

$$\psi(x,y) = 4\cos x \cos y,$$

siehe Abbildung.



a) Die horizontale Komponente (Ost-West) der Geschwindigkeit ist $u = \psi_y$ und die vertikale Komponente (Nord-Süd) der Geschwindigkeit ist $v = -\psi_x$. Skizzieren Sie einige Geschwindigkeitsvektoren und zeigen Sie, dass dieses Vektorfeld im Gegenuhrzeigersinn fliesst.

b) Ist das Geschwindigkeitsfeld quellenfrei?

c) Ist das Geschwindigkeitsfeld wirbelfrei?

d) Bestimmen Sie den Fluss nach aussen durch C des Geschwindigkeitsfeldes.

e) Bestimmen Sie die Zirkulation im Gegenuhrzeigersinn entlang C des Geschwindigkeitsfeldes.

4. Prüfungsaufgabe 7, Winter 2015. Seien $a > 0$ und $b > 0$. Bestimmen Sie unter allen rechteckigen Gebieten

$$G_{a,b} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\big\}$$

dasjenige, für welches der Fluss nach aussen von $\mathbf{F}(x,y) = (-x^2 - 4xy, 6y)$ durch den Rand von $G_{a,b}$ am grössten ist. Welchen Wert hat dieser grösste Fluss?

5. *(Energieerhaltung)* Ein Objekt mit Masse m bewegt sich in einem konservativen Kraftfeld $\mathbf{F} = -\nabla\phi$, wobei ϕ das Potential ist.

a) Die Geschwindigkeit des Objekts sei gegeben durch $\mathbf{v}(t)$. Zeigen Sie

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}).$$

b) Wir nehmen an, dass die Bewegung des Objekts in der Ebene oder im Raum von Punkt A nach Punkt B erfolgt. Die Bewegung wird nach dem zweiten Newtonschen Gesetz beschrieben durch $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, wobei $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$ der Beschleunigungsvektor ist. Zeigen Sie mit Hilfe eines Linienintegrals, dass die totale Energie (kinetisch plus potentiell) $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + \phi$ bei A und B gleich ist. D.h., die Energie bleibt entlang Pfaden zwischen A und B erhalten.

c) Das Gravitationsfeld zwischen zwei Punktmassen M und m ist gegeben durch

$$\mathbf{F} = -GMm\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -GMm\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

wobei G die Gravitationskonstante bezeichnet. M befindet sich dabei im Ursprung und m im Punkt $\mathbf{r} = (x,y,z)$.

Zeigen Sie, dass $\mathbf{F}$ ausserhalb des Ursprungs konservativ ist und bestimmen Sie ein Potential ϕ mit $\mathbf{F} = -\nabla\phi$.

d) Bestimmen Sie die Arbeit von einem Punkt A zu einem Punkt B. Ist diese Arbeit abhängig vom gewählten Weg?