Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

Serie 10

1. Die Aussenwandfläche eines Kraftwerkkühlturms (vgl. Abb. 1) sei beschrieben durch

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{3}\right)^2 + 100, \qquad z \in [-40, 10]. \tag{1}$$

Figure 1: Kühlturm in Form eines Rotationshyperboloids

a) Skizzieren Sie die Menge der Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, welche (1) erfüllen.
b) Geben Sie eine geeignete Parametrisierung der Kühlturmoberfläche an.
c) Wo auf der Oberfläche ist der Normalenvektor parallel zu $(\sqrt{34}, 0, 1)$?
d) Berechnen Sie die Fläche der Kühlturmaussenwand.

2. a) Berechnen Sie die Oberfläche eines Rotationstorus.
b) Bestimmen Sie die Mantelfläche des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 16\}$ zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 16 - 2x$ (Abb. 4).

3. Eine Strömung sei beschrieben durch das Vektorfeld

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{v}(x, y, z) = \left(x, \frac{y}{2}, 2z^2\right).$$

Welche Menge strömt pro Zeiteinheit nach aussen durch denjenigen Teil des Ellipsoids

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1,$$

der sich im ersten Oktanten befindet?

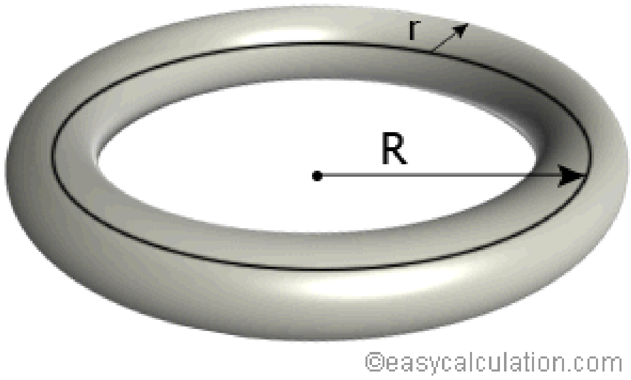

Figure 2: Rotationstorus

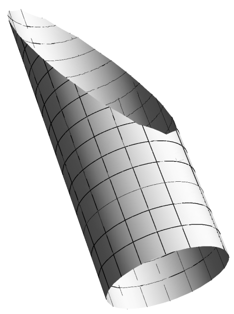

Figure 3: Zylindermantel

4. Vergleichen Sie die Flüsse des Vektorfeldes $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ von innen nach aussen durch

a) die Oberfläche der Halbkugel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$.

b) den Teil des Paraboloids $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z > 0\}$.

5. Berechnen Sie das Integral $\Phi = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, wobei

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (yz,\, -xz,\, xy)$$

ist und

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + 8z^2 = 1,\, z \geq 0\}$$

einen Teil der Oberfläche eines Ellipsoids bezeichnet. Die Normale zeigt nach oben.

a) Gehen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes zu einer Fläche $\tilde{S}$ über, welche für die Berechnung des Integrals günstiger ist.

b) Benutzen Sie den Satz von Stokes, um Φ via Linienintegral zu berechnen.