Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

Serie 11

1. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Satzes von Gauss

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V, \qquad S=\partial D \tag{1}$$

anhand des Beispiels $\mathbf{F}(x,y,z)=(3x,\, xy,\, 2xz)$, $D=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ (Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$).

2. a) Berechnen Sie das Integral $\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, wobei

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(x^2-y^2, z^2-x^2, y^2-z^2\right)$$

ist und C den Rand des Quadrates

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, |x|\le 1,\, |y|\le 1,\, z=0\}$$

mit positiver Orientierung bezeichnet.

b) Berechnen Sie das Integral $\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, wobei

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(2y,\, -z,\, x-y-z)$$

ist und S die Fläche

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=25,\, 3\le x\le 5\}$$

bezeichnet. Die Normale sei dabei nach aussen gerichtet.

c) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, wobei

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(3xy^2,\, xe^z,\, z^3)$$

ist und S die Oberfläche von

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, y^2+z^2\le 1,\, -1\le x\le 2\}$$

bezeichnet. Die Normale sei dabei nach aussen gerichtet.

3. Das Gesetz von Fourier der Wärmeübertragung besagt, dass der Wärmefluss $\mathbf{F}$ proportional zum negativen Gradienten der Temperatur T ist, d.h. $\mathbf{F}=-k\nabla T$. Das bedeutet, dass der Wärmeübergang in Richtung kälterer Bereiche erfolgt. Die Proportionalitätskonstante k ist die Wärmeleitfähigkeit mit der Einheit $\frac{J}{m\,s\,K}$ bzw. $\frac{W}{m\,K}$. Gegeben sei $k=1$ und die Temperatur $T(x,y,z)=100+e^{-z}$ auf

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1,\, 0\le z\le 1\}.$$

Berechnen Sie, direkt und mit Hilfe des Satzes von Gauss, den Gesamtfluss

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

durch die Oberfläche S des Würfels D von innen nach aussen.

4. Es schneit mit einer konstanten Menge Schnee pro Minute und Quadratmeter. Ein Schneepflug beginnt die Räumungsarbeiten um 12 Uhr. In der ersten Stunde fährt er 2 km weit, in der zweiten Stunde 1 km. Wir setzen voraus, dass die Geschwindigkeit des Schneepflugs umgekehrt proportional zur Höhe der Schneedecke ist. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Höhe $h(t)$ der gesamten Schneedecke auf. Wann hat es zu schneien begonnen?

5. Finden Sie eine Differentialgleichung, in der sowohl $y(x)$ als auch eine der ersten beiden Ableitungen $y'(x)$ bzw. $y''(x)$ vorkommen, so dass die jeweils gegebene Funktion y eine L"osung dieser Differentialgleichung ist:

a) $y(x) = x^\alpha + 5x^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$

b) $y(x) = 2^{\lambda x^2}$

c) $y(x) = \tanh(x)$

d) $y(x) = a\sin(7x) + b\cos(7x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$