Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

# Serie 12

**1.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x^2 - 2xy + y^2, \qquad y(0) = 0. \tag{1}$$

a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung im Bereich $[0,3] \times [0,3]$. Entlang welcher Linien hat $y'$ jeweils konstante Werte?

b) Warum kann die Differentialgleichung nicht mittels Separation der Variablen gelöst werden?

c) Substituieren Sie $y(x)$ durch ein geeignetes $u(x)$, so dass die auf $u(x)$ transformierte Differentialgleichung separierbar wird.

d) Lösen Sie die transformierte Differentialgleichung. Berechnen Sie anschliessend aus der gefundenen Lösung $u(x)$ die Funktion $y(x)$.

e) Zeichnen Sie $y(x)$ in Ihre Skizze aus Teil **a)** ein.

**2.** a) Berechnen Sie die Orthogonaltrajektorien für die Familie von Kurven

$$y_c = cx^4, \quad c \in \mathbb{R}$$

und skizzieren Sie diese.

b) Berechnen Sie die Orthogonaltrajektorien für die Familie von Kurven

$$y_c = c \sin x, \quad c \in \mathbb{R}$$

und skizzieren Sie diese.

**3.** **Prüfungsaufgabe 7, Sommer 2011.** Ein nach Hitze strebendes Teilchen hat die Eigenschaft, dass es sich in jedem Punkt $(x, y)$ der Ebene in Richtung des maximalen Temperaturanstiegs bewegt. Die Temperatur im Punkt $(x, y)$ sei gegeben durch die Funktion $T(x, y) = -e^{-2y} \cos x$. Bestimmen Sie eine Gleichung $y = f(x)$ für den Weg eines nach Hitze strebenden Teilchens, welches im Punkt $(\frac{\pi}{4}, 0)$ startet.

**4.** Einem Patient wird per Infusion ein Medikament verabreicht. Pro Minute gelangen 0.1 mg ins Blut. Gleichzeitig baut die Niere pro Minute 5% der im Blut vorhandenen Medikamentenmenge ab. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die momentane Medikamentenmenge $M(t)$ im Blut auf und lösen Sie diese. Wie viel des Medikaments wird sich auf lange Sicht im Blut befinden?

**5.** **Prüfungsaufgabe 4, Sommer 2013.** Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{1+x^2} \cdot y(x) = 8$$

für $x > 0$ mit der Nebenbedingung $y(1) = 4$.