Serie 13

1. Prüfungsaufgabe 4, Winter 2014. Bestimmen Sie die Funktion, für die gilt: An jeder Stelle des Definitionsbereichs ist die Steigung des Graphen der Funktion proportional zur dritten Wurzel des Funktionswerts an dieser Stelle. Zudem soll der Graph dieser Funktion durch die Punkte $(0, 8)$ und $(1, 27)$ gehen.

2. a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' + 5y'' - y' - 5y = 0.$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 0$$

zu der Anfangsbedingung $y(1) = y'(1) = 2$.

c) Die Differentialgleichung

$$f'' + 2qf' + (q + q^2)f = 0$$

enthält einen (reellen) Parameter q. Für welche Werte von q bleiben **alle** Lösungen für $x \to \infty$ beschränkt?

d) Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0,$$

welche die Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \qquad y^{(3)}(0) = 1$$

erfüllt.

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen und lösen Sie in c) und d) das zugehörige Anfangswertproblem.

a) $2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1$
b) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$
c) $y'' - y = \cosh(x), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-1}$
d) $y' - 2y = x^2 e^{2x}, \quad y(0) = -3$

4. Eine Masse m, welche mit einer Feder der Federkonstante f verbunden ist und entlang der x-Achse reibungsfrei schwingt, wird durch eine sinusförmige äussere Kraft mit Frequenz ν angeregt. Die Auslenkung der Masse genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \sin(\nu t),$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$ die sogenannte Eigenfrequenz des Masse-Feder-Systems ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich die Masse an der Stelle $x = 0$ in Ruhe befinden: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega \neq \nu$ (keine Resonanz).

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega = \nu$ (Resonanz).

c) Skizzieren Sie die Ergebnisse aus **a)** und **b)** auf dem Zeitintervall $[0, 10\pi]$ für $\omega = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ bzw. $\omega = \nu = 1$. Was beobachten Sie?

5. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) **Prüfungsaufgabe 5, Winter 2012.**

$$y''(x) + 2y'(x) = 3x\mathrm{e}^x, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = 0.$$

b) **Prüfungsaufgabe 5, Sommer 2012.**

$$y'(x) \cdot (x+1) + y(x) = x^3, \quad y(0) = \sqrt{5}\ .$$