Serie 14

1. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der folgenden homogenen Differentialgleichungen. Falls zusätzlich Anfangsbedingungen angegeben sind, bestimmen Sie darüber hinaus die entsprechenden speziellen Lösungen.

a) $y'' + 2y' - 35y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 3$

b) $\frac{y''}{4} - 3y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

c) $y^{(4)} - 16y = 0$

d) $9y^{(4)} - 16y'' = 0$

2. *(Randwertprobleme.)* Im Gegensatz zu Anfangswertproblemen, wo man Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ vorgibt, sind bei Randwertproblemen Bedingungen für die Lösung am Rande des Ortsintervalls vorgeschrieben. Im Folgenden wollen wir als Beispiel dazu den eindimensionalen Fall der stationären Wärmeleitungsgleichung betrachten.

Wir nehmen an, dass ein homogener Draht der Länge L durch eine Heizung $q(x)$ auf zeitlich konstanter, aber örtlich variabler Temperatur $u(x)$ gehalten wird. Die Wärme kann sich einerseits in Drahtrichtung ausgleichen, andererseits wird die Wärme $\gamma u(x)$ an die Umgebung abgestrahlt. Dann genügen die Grössen folgender Gleichung

$$k\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} - \gamma u(x) + q(x) = 0,$$

wobei die Konstante k vom Material des Drahtes abhängt. Wir nehmen im folgenden $k = 1$ an. Der Draht habe Länge $L = 10$ und sei mit dem Intervall $[0, 10]$ identifiziert.

a) Der Draht sei vollständig isoliert ($\gamma = 0$) und wird auf dem Bereich $[3, 7]$ mit einer konstanten Leistung $q(x) = 5$ erhitzt. Die beiden Enden haben Umgebungstemparatur $u(0) = u(10) = 20$. Berechnen Sie die Temparaturverteilung $u(x)$.

b) Der Draht strahlt gleichmässig Wärme ab ($\gamma = 4$) und werde durch eine Heizung mit $q(x) = \cos(x)$ erhitzt. Die beiden Drahtenden seien isoliert ($u'(0) = u'(10) = 0$). Berechnen Sie die Temparaturverteilung $u(x)$.

3. *(Potenzreihenansatz.)* Lösen Sie folgende Differenzialgleichungen mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

a) Finden Sie die allgemeine Lösung von $y''(x) = y(x)$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(1-x)^2 y''(x) - (1-x)y'(x) - y(x) = 0$$

für $y(0) = 2, y'(0) = 0$.

4. Prüfungsaufgabe 3, Sommer 2014. Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) - y'(x) = 0,$$

wobei $y^{(4)}(x)$ die vierte Ableitung von y nach x bezeichnet und bestimmen Sie daraus alle Lösungen, welche

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

erfüllen.