Aufgabe 1. **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\log x}\Big). \qquad [2 \text{ Punkte}]$$

(b) Beweisen Sie, dass folgende Reihe divergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+2n+n^2+\sin(2n)}{n^3+1} \qquad [2 \text{ Punkte}]$$

(c) Finden Sie heraus, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \log(e^n+n)-n \qquad [2 \text{ Punkte}]$$

konvergiert, und beweisen Sie Ihre Behauptung.

(d) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge

$$f_n(x)=\cos(\tfrac{x}{n}) \qquad [2 \text{ Punkte}]$$

punktweise, aber nicht gleichmässig auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert.

. . . .

Lösung.

(a) Mit l'Hôpital gilt **(vgl. Analysis I Übung 11.4)**

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\log x}\Big)=\lim_{x\to 1}\frac{\log(x)-x+1}{(x-1)\log(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\log(x)+(x-1)\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x^{-2}}{x^{-1}+x^{-2}}=-\frac{1}{2}.$$

. . . .

(b) Es gilt die Abschätzung **(vgl. Analysis I Übung 6.3)**

$$b_n := \frac{2+2n+n^2+\sin(2n)}{n^3+1}\geq\frac{(1+n)^2+1+\sin(2n)}{(n+1)^3}\geq\frac{1}{n+1}.$$

Die Reihe über $\frac{1}{n+1}$ divergiert. Folglich divergiert auch die Reihe über b_n.

(c) Es gilt **(vgl. Analysis I Übungen 4.1 und 5.1)**

$$a_n = \log(e^n + n) - \log(e^n) = \log \frac{e^n + n}{e^n} = \log(1 + ne^{-n}).$$

Die Logarithmusfunktion ist stetig und es gilt $ne^{-n} \to 0$ für $n \to \infty$. Somit konvergiert $a_n \to \log(1) = 0$.

. . . .

(d) Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ gilt **(vgl. Analysis I Übung 10.3)**

$$\lim_{n\to\infty} \cos(\tfrac{x}{n}) = \cos\Big(\lim_{n\to\infty} \tfrac{x}{n}\Big) = \cos(0) = 1$$

dank Stetigkeit der Cosinusfunktion. Folglich konvergiert f_n punktweise gegen die konstante Funktion mit Wert 1.

Die Konvergenz ist nicht gleichmässig wegen

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\cos(\tfrac{x}{n}) - 1\Big| \geq \Big|\cos(\tfrac{n\pi}{n}) - 1\Big| = 2 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2. **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \int_6^{3x} (3^{-t^2})\,dt. \qquad \text{[1 Punkt]}$$

Begründen Sie, warum $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine invertierbare Funktion ist. Berechnen Sie

$$f^{-1}(0) \quad \text{und} \quad (f^{-1})'(0). \qquad \text{[2 Punkte]}$$

(b) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Zahlen.

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| - \mathrm{Im}(z) \leq 1\} \qquad \text{[2 Punkte]}$$

(c) Bestimmen Sie Supremum und Infimum der Menge

$$M = \Big\{\sqrt{|x| + 4} - \sqrt{|x|}\,;\ x \in \mathbb{R}\Big\}. \qquad \text{[3 Punkte]}$$

Besitzt M ein Minimum? Besitzt M ein Maximum? Begründen Sie Ihre Behauptungen.

Lösung.

(a) Gemäss Hauptsatz und Kettenregel gilt **(vgl. Analysis II Übung 1.1)**

$$f'(x) = 3 \cdot 3^{-9x^2} = 3^{1-9x^2}.$$

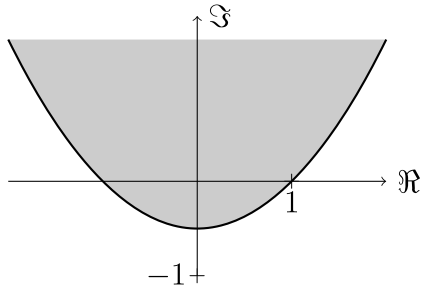
Wegen $f' > 0$ ist f invertierbar von $f(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$. Aus $f(2) = 0$ folgt $f^{-1}(0) = 2$. Der Umkehrsatz zeigt

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(2)} = 3^{35}.$$

. . . .

(b) Mit $z = x + iy$ gilt $|z| - \mathrm{Im}(z) \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 + y$. Die Wurzel ist positiv, daher gilt quadriert

$$x^2 + y^2 \leq 1 + 2y + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq \tfrac{1}{2}(x^2 - 1).$$



(vgl. Probeprüfung Aufgabe 1 b)

. . . .

(c) Der Term **(vgl. Analysis I Übungen 2.4 und 4.1 c_n)**

$$\sqrt{|x| + 4} - \sqrt{|x|} = \frac{4}{\sqrt{|x| + 4} + \sqrt{|x|}} > 0$$

ist streng monoton fallend in $|x|$, hat für $x = 0$ den Wert 2 und konvergiert gegen 0 für $|x| \to \infty$. Daher hat M kein Minimum und es gilt $\inf M = 0$ und $\sup M = \max M = 2$.

Aufgabe 3. **[4 Punkte]**

Beweisen Sie, dass folgende Funktion genau einen Fixpunkt $f(x_0) = x_0$ besitzt.

$$\begin{aligned} f\colon\ ]0, \tfrac{\pi}{2}] &\to]0, \tfrac{\pi}{2}] \\ x &\mapsto \sqrt[3]{\sin x + \cos x} \end{aligned}$$

Lösung. Auf die stetige Funktion **(vgl. Analysis II Übung 4.4)**

$$
\begin{aligned}
g\colon [0,\tfrac{\pi}{2}] &\to [0,\tfrac{\pi}{2}] \\
x &\mapsto \sqrt[3]{\sin x + \cos x}.
\end{aligned}
$$

wenden wir den Fixpunktsatz von Banach an. Auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ gilt $0 \le \sin(x), \cos(x) \le 1$.

$$
|g'(x)| = \left|\frac{\cos x - \sin x}{3(\sin x + \cos x)^{\frac{2}{3}}}\right| \le \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{3} \le \frac{2}{3} < 1,
$$

das heisst, g ist eine Kontraktion. Da das Intervall $[0,\frac{\pi}{2}]$ kompakt ist, hat g genau einen Fixpunkt $x_0 \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Es gilt $x_0 \in \,]0,\frac{\pi}{2}]$, denn $g(0) = 1$ ist kein Fixpunkt.

. . . .

Alternative Lösung. Auf die stetige Funktion **(vgl. Analysis I Übung 9.4)**

$$
\begin{aligned}
h\colon [0,\tfrac{\pi}{2}] &\to [0,\tfrac{\pi}{2}] \\
x &\mapsto x - \sqrt[3]{\sin x + \cos x}.
\end{aligned}
$$

wenden wir den Zwischenwertsatz an. Es gilt $h(0) = -1 < 0$ und $h(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$. Somit hat h im Intervall $]0,\frac{\pi}{2}[$ mindestens eine Nullstelle, das heisst, f hat mindestens einen Fixpunkt. Wir zeigen, dass h streng monoton wachsend ist, woraus Eindeutigkeit des Fixpunkts folgt. Auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ gilt $0 \le \sin(x), \cos(x) \le 1$, also ist

$$
h'(x) = 1 - \frac{\cos x - \sin x}{3(\sin x + \cos x)^{\frac{2}{3}}} \ge 1 - \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{3} \ge \frac{1}{3} > 0.
$$

Aufgabe 4. **[6 Punkte]**

(a) Finden Sie alle Extremstellen der Funktion

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto x^2 + y^2 - 5y
\end{aligned}
$$

unter der Nebenbedingung

$$
g(x,y) := x^2 - y^3 = 0.
$$
[4 Punkte]

(b) Skizzieren Sie die Menge $S = g^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ sowie die Niveaulinien von f. [1 Punkt]

(c) Geben Sie zu jeder Extremstelle aus (a) an, ob es sich um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt. [1 Punkt]

Lösung. **(vgl. Analysis II Übungen 11.1 und 11.4)**

(a) Es gilt $dg(x, y) = (2x, -3y^2)$. Der Punkt $(0, 0)$ ist nicht-regulär für g und erfüllt die Nebenbedingung.

Aus dem Lagrange-Formalismus folgt

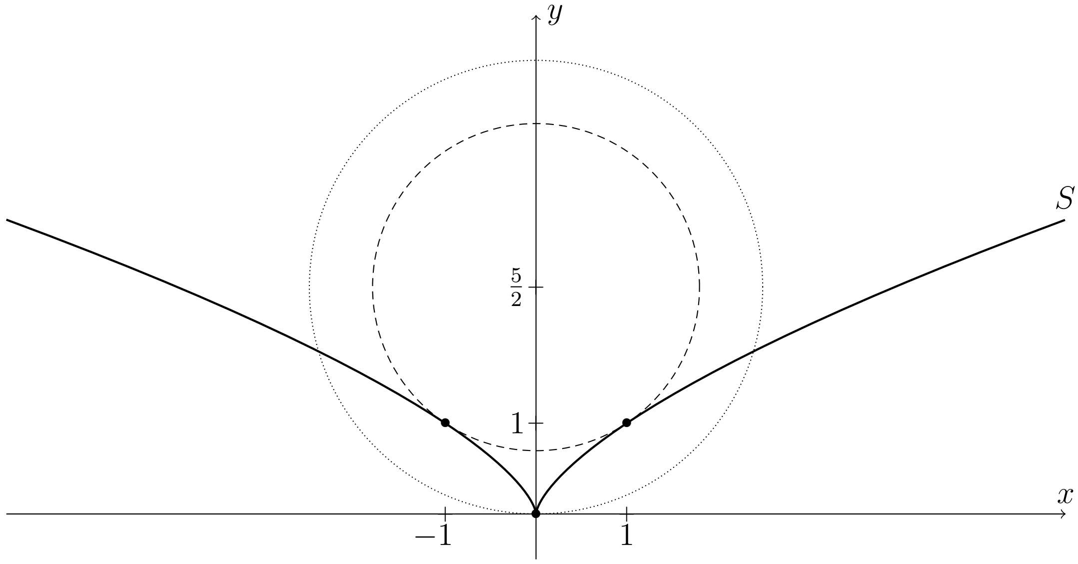
$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x, \\ 2y - 5 &= -3\lambda y^2, \\ g(x, y) = x^2 - y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $\lambda = 1$. Im Fall $x = 0$ folgt $y = 0$ aus der Nebenbedingung, was aber der zweiten Gleichung widerspricht; also $\lambda = 1$. Damit wird die zweite Gleichung zu

$$0 = 3y^2 + 2y - 5 = (y - 1)(3y + 5).$$

Die Lösung $y = -\frac{5}{3} < 0$ widerspricht der Nebenbedingung $y^3 = x^2 \geq 0$. Es verbleibt $y = 1$, woraus $x = \pm 1$ folgt. Somit haben wir die Kandidaten $(\pm 1, 1)$ und $(0, 0)$.

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5y = (x - 0)^2 + (y - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$ misst bis auf eine Konstante den quadrierten Euklidischen Abstand vom Punkt $(0, \frac{5}{2}) \in \mathbb{R}^2$.



(c) Anhand der Zeichnung der Niveaulinien folgt, dass bei $(\pm 1, 1)$ Minima vorliegen und $(0, 0)$ ein lokales Maximum ist.

Alternativ ist $f(-1, 1) = f(1, 1) = -3 < 0 = f(0, 0)$. Da $f(x, y) \to \infty$ für $|(x, y)| \to \infty$ und da es nur zwei Funktionswerte für sämtliche Kandidaten gibt, sind die Punkte $(\pm 1, 1)$ Minimalstellen und der Punkt $(0, 0)$ eine lokale Maximalstelle.

Aufgabe 5. **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion $f(x) = e^{\sin x}$ um den Punkt $x_0 = \pi$. Begründen Sie, warum der Approximationsfehler im Intervall $[\pi - \frac{1}{10}, \pi + \frac{1}{10}]$ dabei strikt kleiner ist als $\frac{3}{800}$.

Lösung. Es gilt **(vgl. Analysis I Übung 12.3)**

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\sin x}, & f(\pi) &= 1, \\ f'(x) &= (\cos x)e^{\sin x}, & f'(\pi) &= -1, \\ f''(x) &= \big(-\sin x + \cos^2 x\big)e^{\sin x}, & f''(\pi) &= 1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$T_2 f(x;\pi) = 1 - (x-\pi) + \tfrac{1}{2}(x-\pi)^2.$$

Mit $|\sin(x)|, |\cos(x)| \leq 1$ folgt aus

$$f'''(x) = \big(-\cos x - 3\cos x \sin x + \cos^3 x\big)e^{\sin x}.$$

sofort $|f'''(x)| \leq 5e$. Der Betrag des Approximationsfehlers in $[\pi - \frac{1}{10}, \pi + \frac{1}{10}]$ wird damit abgeschätzt durch

$$\sup_{x\in[\pi-\frac{1}{10},\pi+\frac{1}{10}]} \frac{|f'''(x)|}{3!}\left(\frac{1}{10}\right)^3 \leq \frac{5\cdot e}{6\cdot 1000} < \frac{5\cdot 3}{6000} = \frac{2}{800}.$$

. . . .

Bemerkung. Die Aufgabe lässt sich auch mit der schwächeren Resttermabschätzung aus Bemerkung 5.5.1. lösen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \big(-\cos x - 3\cos x \sin x + \cos^3 x\big)e^{\sin x}, \\ &= \big((\cos^2 x - 1)\cos x - 3\cos x \sin x\big)e^{\sin x} \\ &= \big(-\sin^2 x \cos x - \tfrac{3}{2}\sin(2x)\big)e^{\sin x}, \end{aligned}$$

woraus $|f'''(x)| \leq (1 + \frac{3}{2})e = \frac{5}{2}e$ folgt. Der Fehler wird dann abgeschätzt durch

$$\sup_{x\in[\pi-\frac{1}{10},\pi+\frac{1}{10}]} \frac{|f'''(x)|}{2!}\left(\frac{1}{10}\right)^3 \leq \frac{5e}{2\cdot 2!\cdot 10^3} < \frac{5\cdot 3}{2\cdot 2!\cdot 10^3} = \frac{3}{800}.$$

Aufgabe 6. **[11 Punkte]**

(a) Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)y(x)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$ [3 Punkte]

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$f''(x) + f'(x) - 6f(x) = -4\sinh(x).$$ [4 Punkte]

(c) Finden Sie alle Lösungen $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'(x) + 2x\,y(x) = 2x^3.$$ [4 Punkte]

Lösung:

(a) Via Separation der Variablen folgt **(vgl. Analysis II Übung 1.2)**

$$\frac{1}{2}\big(y(x)\big)^2 = \int y(x)y'(x)\,dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \log\left(1+e^x\right) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$
$$y(x) = \pm\sqrt{2\log\left(1+e^x\right) + 2C}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = -2$ impliziert das negative Vorzeichen und es folgt $2C = 4 - 2\log 2$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit

$$y(x) = -\sqrt{2\log\left(1+e^x\right) + 4 - 2\log 2}.$$

. . . .

(b) Das charakteristische Polynom **(vgl. Analysis I Übung 14.3 b)**

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2)$$

führt auf die Lösung

$$f_{\mathrm{h}}(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

der homogenen Gleichung. Mit dem Ansatz $f_{\mathrm{p}}(x) = a\cosh(x) + b\sinh(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} (a+b-6a)\cosh(x) &= 0 &\Rightarrow&\quad b = 5a, \\ (a+b-6b)\sinh(x) &= -4\sinh(x) &\Rightarrow&\quad -24a = -4, \end{aligned}$$

also $a = \frac{1}{6}$ und $b = \frac{5}{6}$ für eine partikuläre Lösung. Die Lösung der Gleichung lautet

$$f(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \tfrac{1}{6}\cosh(x) + \tfrac{5}{6}\sinh(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Die homogene Gleichung **(vgl. Analysis II Übung 2.3)**

$$y_{\mathrm{h}}'(x) + 2x\, y_{\mathrm{h}}(x) = 0$$

hat eine konstante Lösung $y_{\mathrm{h}}(x) = 0$. Für $y_{\mathrm{h}}(x) \neq 0$ ist die Gleichung separierbar:

$$\begin{aligned}
\log|y_{\mathrm{h}}(x)| &= \int \frac{y_{\mathrm{h}}'(x)}{y_{\mathrm{h}}(x)}\,dx = \int -2x\,dx = -x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R},\\
|y_{\mathrm{h}}(x)| &= e^C e^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R},\\
y_{\mathrm{h}}(x) &= \tilde{C} e^{-x^2}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet somit

$$y_{\mathrm{h}}(x) = ce^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Via Variation der Konstanten erhält man eine partikuläre Lösung

$$y_{\mathrm{p}}(x) = c(x)e^{-x^2} \quad \text{mit} \quad c'(x) = 2x^3 e^{x^2}.$$

Mit Substitution $u = x^2$ und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
c(x) &= \int x^2 e^{x^2} \cdot 2x\,dx = \int ue^u\,du = ue^u - e^u = x^2 e^{x^2} - e^{x^2},\\
y_{\mathrm{p}}(x) &= c(x)e^{-x^2} = x^2 - 1.
\end{aligned}$$

Alle Lösungen der Differentialgleichung sind somit gegeben durch

$$y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) = ce^{-x^2} + x^2 - 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

. . . .

Alternative: Multipliziert man die Gleichung $y' + 2xy = 2x^3$ mit $e^{x^2} > 0$, so folgt

$$\begin{aligned}
(e^{x^2} y)' &= e^{x^2}(y' + 2xy) = e^{x^2} 2x^3,\\
e^{x^2} y &= \int e^{x^2} 2x^3\,dx + c = x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R},\\
y &= x^2 - 1 + ce^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. **[9 Punkte]**

(a) Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ das ausgefüllte Dreieck mit den Eckpunkten $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ und $p_3 = (\frac{\pi}{2}, 1)$. Berechnen Sie

$$\int_{\partial A} \Big((e^{-x^2} - y)\, dx - (\cos x)\, dy \Big), \qquad [3 \text{ Punkte}]$$

wobei der Rand von A im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ der Kreisring, der von den Kreisen $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = 4$ berandet wird. Bestimmen Sie

$$\int_\Omega (4y^2 + 1)\, d\mu(x,y). \qquad [3 \text{ Punkte}]$$

(c) Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfelds $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2x^3 \\ x^4y + \pi \sin(\pi y) \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned} \qquad [3 \text{ Punkte}]$$

. . . .

Lösung:

(a) Mit dem Satz von Green folgt **(vgl. Analysis II Übung 12.3)**

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \Big((e^{-x^2} - y)\, dx - \cos(x)\, dy \Big) &= \int_A \big(\sin(x) + 1\big)\, d\mu(x,y) \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{2}y}^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x) + 1\big)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \Big(\cos(\tfrac{\pi}{2}y) + (\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}y)\Big)\, dy = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

. . . .

(b) Mit Polarkoordinaten gilt **(vgl. Analysis II Übung 13.1)**

$$\begin{aligned} \int_\Omega (4y^2 + 1)\, d\mu(x,y) &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (4r^2 \sin^2 \varphi + 1) \cdot r\, d\varphi\, dr \\ &= \int_1^2 (4\pi r^3 + 2\pi r)\, dr = \pi \Big[r^4 + r^2 \Big]_1^2 = 18\pi. \end{aligned}$$

. . . .

(c) Es gilt $v = \nabla f$ mit **(vgl. Analysis II Übungen 7.4 oder 13.3)**

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}x^4y^2 - \cos(\pi y).$$

Somit gilt $\int_\varphi v \cdot d\vec{s} = f(\varphi(\pi)) - f(\varphi(0)) = f(-1,0) - f(1,0) = 0.$

Aufgabe 8. **[8 Punkte]**

(a) Gegeben sind die Fläche

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

und das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} -yz \\ zx \\ -1 \end{pmatrix}.$$

[4 Punkte]

Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds v von oben nach unten durch die Fläche M.
Hinweis: Eine Skizze von M kann hilfreich sein.

(b) Sei $0 < a < 1$. Ein Behältnis sei gegeben durch die Menge

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Bestimmen Sie das Volumen von $K \subset \mathbb{R}^3$. [4 Punkte]

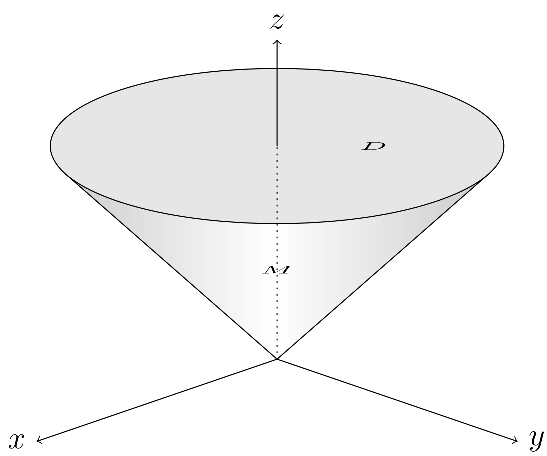
Lösung:

(a) Die Kreisscheibe **(vgl. Analysis II Übung 13.4)**

$$D = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 < 1\}$$

und M beranden zusammen einen Kegel $V \subset \mathbb{R}^3$. Es gilt $\operatorname{div}(v) = 0$. Mit dem Satz von Gauss und $n_D = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ folgt

$$\int_M v \cdot n_M \, do = \int_V \operatorname{div}(v) \, d\mu - \int_D v \cdot n_D \, do = \int_D 1 \, do = \pi.$$



Alternative Lösung: Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\}$. Der Kegelmantel M wird parametrisiert durch $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) &= \big(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\big),\\
\Phi_x(x,y) &= \big(1, 0, x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\big),\\
\Phi_y(x,y) &= \big(0, 1, y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\big),\\
\Phi_x \times \Phi_y &= \big(x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}, y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}, -1\big),\\
v \circ \Phi &= \big(-y\sqrt{x^2+y^2}, x\sqrt{x^2+y^2}, -1\big).
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_M v \cdot n_M \, do = \int_\Omega (v\circ\Phi)\cdot(\Phi_x \times \Phi_y)\, d\mu(x,y) = \int_\Omega (-xy + yx + 1)\, d\mu(x,y) = \pi.$$

. . . .

(b) In Zylinderkoordinaten gilt **(vgl. Analysis II Übung 13.2)**

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(K) &= \int_0^{2\pi}\int_0^a \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\, dz\, dr\, d\varphi\\
&= 2\pi \int_0^a 2r\sqrt{1-r^2}\, dr\\
&= 2\pi \int_0^{a^2} \sqrt{1-s}\, ds = 2\pi\Big[-\tfrac{2}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{a^2} = \frac{4\pi}{3}\Big(1-(1-a^2)^{\frac{3}{2}}\Big).
\end{aligned}$$