Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Michael Struwe 8. August 2016

Analysis I & II Basisprüfung

D-INFK

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 180 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.
- Maximalpunktzahl: 60 Punkte.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[8]	
2	[8]	
3	[4]	
4	[6]	
5	[6]	
6	[11]	
7	[9]	
8	[8]	
Total	[60]	

Vollständigkeit	
Note	

Aufgabe 1. **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right).$$

(b) Beweisen Sie, dass folgende Reihe divergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+2n+n^2+\sin(2n)}{n^3+1}$$

(c) Finden Sie heraus, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n=\log(e^n+n)-n$$

konvergiert, und beweisen Sie Ihre Behauptung.

(d) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge

$$f_n(x)=\cos(\tfrac{x}{n})$$

punktweise, aber nicht gleichmässig auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert.

Aufgabe 2. **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x)=\int_6^{3x}(3^{-t^2})\,dt.$$

Begründen Sie, warum $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine invertierbare Funktion ist. Berechnen Sie

$$f^{-1}(0)\quad\text{und}\quad(f^{-1})'(0).$$

(b) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Zahlen.

$$\{z\in\mathbb{C}\,;\ |z|-\mathrm{Im}(z)\le 1\}$$

(c) Bestimmen Sie Supremum und Infimum der Menge

$$M=\left\{\sqrt{|x|+4}-\sqrt{|x|}\,;\ x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Besitzt M ein Minimum? Besitzt M ein Maximum? Begründen Sie Ihre Behauptungen.

Aufgabe 3. **[4 Punkte]**

Beweisen Sie, dass folgende Funktion genau einen Fixpunkt $f(x_0) = x_0$ besitzt.

$$f\colon\ ]0, \tfrac{\pi}{2}] \to\ ]0, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$x \mapsto \sqrt[3]{\sin x + \cos x}$$

Aufgabe 4. **[6 Punkte]**

(a) Finden Sie alle Extremstellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 5y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := x^2 - y^3 = 0.$$

(b) Skizzieren Sie die Menge $S = g^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ sowie die Niveaulinien von f.

(c) Geben Sie zu jeder Extremstelle aus (a) an, ob es sich um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt.

Aufgabe 5. **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion $f(x) = e^{\sin x}$ um den Punkt $x_0 = \pi$. Begründen Sie, warum der Approximationsfehler im Intervall $[\pi - \frac{1}{10}, \pi + \frac{1}{10}]$ dabei strikt kleiner ist als $\frac{3}{800}$.

Aufgabe 6. **[11 Punkte]**

(a) Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{e^x}{(1 + e^x)y(x)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$f''(x) + f'(x) - 6f(x) = -4\sinh(x).$$

(c) Finden Sie alle Lösungen $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'(x) + 2x\,y(x) = 2x^3.$$

Aufgabe 7. **[9 Punkte]**

(a) Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ das ausgefüllte Dreieck mit den Eckpunkten $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ und $p_3 = (\frac{\pi}{2}, 1)$. Berechnen Sie

$$\int_{\partial A} \Big((e^{-x^2} - y)\, dx - (\cos x)\, dy \Big),$$

wobei der Rand von A im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ der Kreisring, der von den Kreisen $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = 4$ berandet wird. Bestimmen Sie

$$\int_\Omega (4y^2 + 1)\, d\mu(x, y).$$

(c) Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfelds $v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^2x^3 \\ x^4y + \pi \sin(\pi y) \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve

$$\begin{aligned} \varphi \colon [0, \pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

Aufgabe 8. **[8 Punkte]**

(a) Gegeben sind die Fläche

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\ x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \le z \le 1\}$$

und das Vektorfeld $v \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} -yz \\ zx \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds v von oben nach unten durch die Fläche M.
Hinweis: Eine Skizze von M kann hilfreich sein.

(b) Sei $0 < a < 1$. Ein Behältnis sei gegeben durch die Menge

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 \le a^2\}.$$

Bestimmen Sie das Volumen von $K \subset \mathbb{R}^3$.