### 1.1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**(a)** Der Hauptsatz impliziert

$$f'(x) = \left(\int_x^1 \sin^2(t)\,dt\right)' = \left(\int_1^x -\sin^2(t)\,dt\right)' = -\sin^2(x).$$

**(b)** Es gilt $f(x) = u\big(v(x)\big)$ mit $v(x) = x^3$ und

$$u(s) = \int_0^s \cos^3(t)\,dt.$$

Gemäss Hauptsatz ist $u$ differenzierbar mit Ableitung $u'(s) = \cos^3(s)$. Aus der Kettenregel folgt $f'(x) = u'\big(v(x)\big)v'(x) = 3x^2\cos^3(x^3)$.

**(c)** Gemäss Hauptsatz ist $f$ differenzierbar mit $f'(x) = \cos(\cos x)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(\cos x) > 0$ vermöge $\cos(x) \in [-1,1] \subsetneq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mit strikt positiver Ableitung ist $f$ streng monoton wachsend und deshalb eine bijektive Funktion $\mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$. Offensichtlich liegt $0 = f(\pi)$ im Bild, sodass $f^{-1}(0) = \pi$ existiert. Mit der Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion folgt

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{\cos(\cos\pi)} = \frac{1}{\cos(-1)}.$$

### 1.2. Separierbare Differentialgleichungen

**(a)** Die rechte Seite der Differentialgleichung $y' = y^2 - 1$ verschwindet, falls $y(x) = \pm 1$. Insbesondere sind die konstanten Funktionen $y_1(x) = 1$ und $y_2(x) = -1$ Lösungen.

Im Fall $y(x) \neq \pm 1$ ist $\dfrac{y'(x)}{(y(x))^2 - 1} = 1$. Mit Substitution folgt

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int \frac{y'(x)}{(y(x))^2-1}\,dx = \int 1\,dx = x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Die Stammfunktion auf der linken Seite bestimmen wir durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}.$$

Da $1 = (y+1)A + (y-1)B$ gelten muss, ist $A = \frac{1}{2}$ und $B = -\frac{1}{2}$ und wir erhalten

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y-1}\,dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y+1}\,dy = \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.$$

Für die Lösung der Gleichung gilt damit

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \qquad \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2c}e^{2x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wir suchen stetige Lösungen $y(x)$ und schliessen $y(x) = \pm 1$ aus. Daher hat $\frac{y-1}{y+1}$ konstantes Vorzeichen. Folglich existiert eine Konstante $C = \pm e^{2c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass

$$\frac{y-1}{y+1} = Ce^{2x} \qquad \Leftrightarrow \quad (1 - Ce^{2x})y = Ce^{2x} + 1, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Im Fall $C > 0$ ist $y(x)$ nicht für alle $x$ definiert. $y' = y^2 - 1$ hat also folgende Lösungen.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1, \quad \text{definiert auf ganz } \mathbb{R}, \\ y_2(x) &= -1, \text{ definiert auf ganz } \mathbb{R}, \\ y_3(x) &= \frac{1 + Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}} \quad \begin{cases} \text{definiert für } x \neq -\frac{1}{2}\log C, \text{ falls } C > 0, \\ \text{definiert auf ganz } \mathbb{R}, \text{ falls } C < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**(b)** Die rechte Seite der Differentialgleichung $y' = e^{x+y}$ ist stets positiv, es gibt also keine konstanten Lösungen. Aus $e^{-y}y' = e^x$ folgt mit Substitution

$$\int e^{-y}\,dy = \int e^{-y(x)}y'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für die Lösungen der Gleichung gilt damit

$$-e^{-y} = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichung $e^{-y} = -c - e^x$ ist nur für $C := -c > 0$ lösbar. Wir erhalten

$$y(x) = -\log(C - e^x), \quad C > 0, \text{ definiert für } x < \log C.$$

**(c)** Um die Gleichung zu separieren, formen wir wie folgt um.

$$y' = \frac{e^{x+y} - e^{x-y}}{\cosh(y)} = e^x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{\cosh(y)} = 2e^x \cdot \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}.$$

Die rechte Seite verschwindet nur für $y = 0$ und wir erhalten eine konstante Lösung $y(x) = 0$. Für $y \neq 0$ erhalten wir mit Substitution

$$\int \frac{\cosh(y)}{\sinh(y)}\,dy = \int \frac{\cosh(y(x))}{\sinh(y(x))}y'(x)\,dx = \int 2e^x\,dx = 2e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Links kann $z(y) = \sinh(y)$ substituiert werden, denn $z'(y) = \cosh(y)$. Damit erhalten wir $\log|\sinh(y)|$ als Stammfunktion auf der linken Seite. Folglich gilt

$$\log|\sinh y| = 2e^x + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad |\sinh y| = e^c e^{(2e^x)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wie in (a) existiert $C = \pm e^c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $\sinh y = Ce^{(2e^x)}$. Da $y \equiv 0$ ebenfalls eine Lösung ist, lassen wir $C = 0$ wieder zu. Die Lösungen sind somit von der Form

$$y(x) = \operatorname{arsinh}\Big(Ce^{(2e^x)}\Big), \quad C \in \mathbb{R}.$$

**(d)** Die Differentialgleichung $y' = \cos(2x)\, y \log(y)$ lässt wegen des Logarithmus nur positive Lösungen zu. Die rechte Seite verschwindet daher nur für $y = 1$ und wir erhalten eine konstante Lösung $y(x) = 1$. Im Fall $y(x) \neq 1$ gilt mit Substitution

$$\int \frac{1}{y\log(y)}\, dy = \int \frac{y'(x)}{y(x)\log(y(x))}\, dx = \int \cos(2x)\, dx = \tfrac{1}{2}\sin(2x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Links kann $z(y) = \log(y)$ substituiert werden, denn $z'(y) = \frac{1}{y}$. Damit erhalten wir $\log|\log y|$ als Stammfunktion auf der linken Seite. Folglich gilt

$$\log|\log y| = \tfrac{1}{2}\sin(2x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad |\log y| = e^c e^{\frac{1}{2}\sin(2x)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wie in (a) existiert eine Konstante $C = \pm e^c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $\log y = Ce^{\frac{1}{2}\sin(2x)}$.

$$\Rightarrow \; y = e^{(Ce^{\frac{1}{2}\sin(2x)})} = \big(e^C\big)^{(e^{\frac{1}{2}\sin(2x)})}.$$

Da $y \equiv 1$ ebenfalls eine Lösung ist, lassen wir den Fall $C = 0$ (also $e^C = 1$) wieder zu. Dann ist $a = e^C$ eine beliebige positive Zahl. Die Lösungen sind folglich von der Form

$$y(x) = a^{(e^{\frac{1}{2}\sin(2x)})}, \quad a > 0.$$

**(e)** Die Gleichung $y' - y = y\log(x) + 1 + \log(x)$ ist höchstens für $x > 0$ lösbar. Wir formen um und erhalten $y' = (\log(x) + 1)(y + 1)$. Die rechte Seite verschwindet für $y = -1$ und wir erhalten eine konstante Lösung $y(x) = -1$. Im Fall $y(x) \neq -1$ gilt

$$\int \frac{1}{y+1}\, dy = \int \frac{y'(x)}{y(x)+1}\, dx = \int \Big(\log(x) + 1\Big)\, dx = x\log(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$\log|y + 1|$ ist eine mögliche Stammfunktion auf der linken Seite. Folglich gilt

$$|y + 1| = e^c e^{x\log(x)} = e^c x^x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wie in (a) existiert eine Konstante $C = \pm e^c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $y + 1 = Cx^x$. Da $y \equiv -1$ ebenfalls eine Lösung ist, lassen wir $C = 0$ wieder zu und erhalten Lösungen

$$y(x) = Cx^x - 1, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ definiert für } x > 0.$$

Die Anfangsbedingung $3 = y(2) = 4C - 1$ ist erfüllt für $C = 1$, also $y(x) = x^x - 1$.

### 1.3. Substitution und Partialbrüche

**(a)** Die Substitution $y(t) = \sqrt{t}$ mit $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ zeigt

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})\,dt &= \int_0^{\pi^2} \frac{2\sqrt{t}\,\sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\,dt = \int_{y(0)}^{y(\pi^2)} 2y(t)\sin(y(t))\cdot y'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi} 2y\sin(y)\,dy = \Big[-2y\cos(y)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\cos y\,dy \\ &= 2\pi - 0 + \Big[2\sin y\Big]_0^{\pi} = 2\pi.\end{aligned}$$

**(b)** Wir substituieren $y = e^t$. Dann ist $t = \log y$ und $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y}$. Die untere Integralgrenze $t = 0$ entspricht $y = 1$. Die obere Integralgrenze $t = \log 3$ entspricht $y = 3$. Somit ist

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 3} e^{3t-e^t}\,dt &= \int_1^3 e^{3\log(y)-y}\cdot\frac{1}{y}\,dy = \int_1^3 y^2e^{-y}\,dy \\ &= \Big[-y^2e^{-y}\Big]_1^3 + \int_1^3 2y\,e^{-y}\,dy = \Big[-y^2e^{-y} - 2ye^{y}\Big]_1^3 + \int_1^3 2e^{-y}\,dy \\ &= \Big[-y^2e^{-y} - 2ye^{-y} - 2e^{-y}\Big]_1^3 = -17e^{-3} + 5e^{-1}.\end{aligned}$$

**(c)** Die Substitution $y(x) = \cos(x)$ mit $y'(x) = -\sin(x)$ zeigt

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \int \frac{-y'(x)}{(y(x))^2}\,dx = \int \frac{-1}{y^2}\,dy = \frac{1}{y} + c = \frac{1}{\cos x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**(d)** Wegen $x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$ ist

$$\frac{4x+8}{x^4-16} = \frac{4}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B+Cx}{x^2+4}$$

der richtige Ansatz für eine Partialbruchzerlegung (vgl. Beispiel 6.1.7). Aus

$$4 = A(x^2+4) + (B+Cx)(x-2) = (A+C)x^2 + (B-2C)x + 4A - 2B$$

folgt $A + C = 0$ sowie $B - 2C = 0$ und $4A - 2B = 4$. Die ersten beiden Gleichungen implizieren $A = -C = -\frac{1}{2}B$. Insgesamt folgt $B = -1$, $C = -\frac{1}{2}$ und $A = \frac{1}{2}$. Es gilt

$$\begin{aligned}&\int \frac{A}{x-2}\,dx = A\log|x-2|, \\ &\int \frac{B}{x^2+4}\,dx = \frac{B}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{B}{2}\arctan\Big(\frac{x}{2}\Big), \\ &\int \frac{Cx}{x^2+4}\,dx = \frac{C}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{C}{2}\int \frac{1}{y+4}\,dy = \frac{C}{2}\log|y+4| = \frac{C}{2}\log|x^2+4|.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\int \frac{4x+8}{x^4-16}\,dx = \frac{1}{2}\log|x-2| - \frac{1}{2}\arctan\Big(\frac{x}{2}\Big) - \frac{1}{4}\log|x^2+4| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$