2.1. Gleichmässige Stetigkeit $f\colon \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gleichmässig stetig*, falls

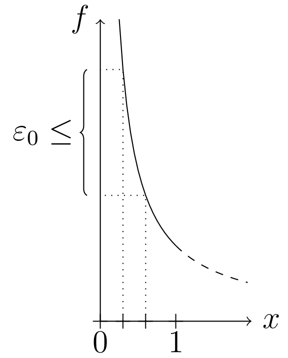
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in \Omega : \quad |x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ist *nicht* gleichmässig stetig, falls

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in \Omega : \quad |x - y| < \delta \;\wedge\; |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

• Die Funktion $f\colon\ ]0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist zwar stetig, aber nicht gleichmässig stetig. Wir wählen $\varepsilon_0 = 1$. Sei $1 \geq \delta > 0$ beliebig. Wählen wir $x = \delta$ und $y = \frac{\delta}{2}$, so gilt $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, aber

$$|f(x) - f(y)| = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} \geq 1 = \varepsilon_0.$$

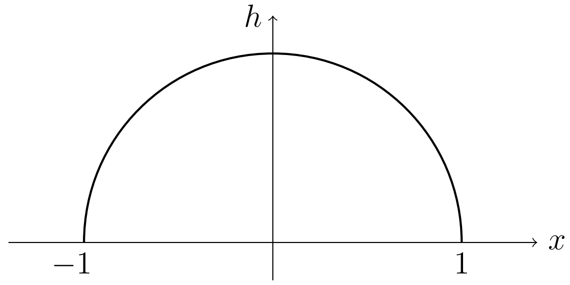


• Ebenso ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$ nicht gleichmässig stetig. Sei $\varepsilon_0 = 1$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Wählen wir $x = y + \frac{\delta}{2}$ so gilt $|x - y| < \delta$. Wegen $(e^{\frac{\delta}{2}} - 1) > 0$ können wir y anschliessend so wählen, dass $e^y > (e^{\frac{\delta}{2}} - 1)^{-1}$. Dann folgt

$$|g(x) - g(y)| = e^x - e^y = e^y(e^{\frac{\delta}{2}} - 1) \geq 1 = \varepsilon_0.$$

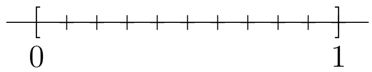
• Die Funktion $h\colon\ ]0, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ lässt sich mit $0 \mapsto 0$ stetig auf das kompakte Intervall $[0, 1]$ fortsetzen. Gemäss Satz 4.7.3 ist h dann gleichmässig stetig. (Stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind gleichmässig stetig.)

Bemerkung [vgl. Analysis I, Aufgabe 8.1 (c)]. Die Funktion h ist stetig, gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz stetig.



2.2. Riemannsummen Von $f \in C^1([0,1])$ ist lediglich die Schranke $|f'| \leq 5$ an die erste Ableitung bekannt. Daher bietet sich eine *äquidistante* Zerlegung

$$[0,1] = \left[0, \tfrac{1}{n}\right] \cup \left]\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}\right] \cup \ldots \cup \left]\tfrac{n-1}{n}, 1\right]$$



in Teilintervalle $I_1, \ldots, I_n$, alle von der Länge $|I_k| = \frac{1}{n}$, an. Zunächst schätzen wir ab, um wie viel sich der Funktionswert an der Stützstelle x_k vom Wert an einer beliebigen anderen Stelle $x \in I_k$ unterscheiden kann.

$$\begin{aligned}\Big|f(x) - f(x_k)\Big| = \left|\int_{x_k}^{x} f'(t)\,dt\right| &\leq \int_{x_k}^{x} |f'(t)|\,dt \\ &\leq |x - x_k| \cdot \sup_{t \in I_k} |f'(t)| \leq 5|x - x_k|.\end{aligned}$$

Nun vergleichen wir das Integral von f im Teilintervall mit der Fläche der zugehörigen Treppenstufe.

$$\begin{aligned}\left|f(x_k)|I_k| - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx\right| &= \left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x_k) - f(x)\,dx\right| \\ &\leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big|f(x_k) - f(x)\Big|\,dx \\ &\leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5|x - x_k|\,dx \\ &= \int_{x_k}^{\frac{k}{n}} 5(x - x_k)\,dx - \int_{\frac{k-1}{n}}^{x_k} 5(x - x_k)\,dx \\ &= \frac{5}{2}\left(\tfrac{k}{n} - x_k\right)^2 + \frac{5}{2}\left(\tfrac{k-1}{n} - x_k\right)^2 \qquad (\dagger) \\ &\leq \frac{5}{2n^2}.\end{aligned}$$

Der Term $(\dagger)$ wird maximal, falls x_k am Rand des Intervalls I_k liegt. (Die Parabel ist nach oben geöffnet.) Dann ist ein Summand 0 und der andere vom Wert $\frac{5}{2n^2}$. Insgesamt folgt

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)|I_k|\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k)|I_k| - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx\right)\right| \leq \frac{n5}{2n^2} = \frac{5}{2n}.$$

Eine Zerlegung in $n = 250$ Teilintervalle garantiert somit eine Approximation des Integrals mit Fehlerschranke $\frac{1}{100}$.

2.3. Variation der Konstanten Gegeben ist die lineare, inhomogene Gleichung

$$y'(x) = y(x)\ \tan(x) + 4\sin(x).$$

• Die homogene Gleichung $y_\mathrm{h}'(x) = y_\mathrm{h}(x)\ \tan(x)$ lösen wir durch Trennung der Variablen. Die rechte Seite verschwindet für $y_\mathrm{h} = 0$ und wir erhalten eine konstante Lösung $y_\mathrm{h}(x) = 0$. Im Fall $y_\mathrm{h}(x) \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\log|y_\mathrm{h}(x)| &= \int \frac{y_\mathrm{h}'(x)}{y_\mathrm{h}(x)}\,dx = \int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\log|\cos(x)| + C,\\
|y_\mathrm{h}(x)| &= \frac{e^C}{|\cos(x)|}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[,\\
y_\mathrm{h}(x) &= \frac{c}{\cos(x)}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Nehmen wir $y_\mathrm{h}(x) = 0$ wieder mit dazu, so erhalten wir $y_\mathrm{h}(x) = \frac{c}{\cos(x)}$, $c \in \mathbb{R}$ als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

• Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung finden wir via Variation der Konstanten: $y_\mathrm{p}(x) = \frac{c(x)}{\cos(x)}$. Dann gilt

$$y_\mathrm{p}(x)\tan(x) + 4\sin(x) \overset{!}{=} y_\mathrm{p}'(x) = \frac{c'(x)}{\cos(x)} + \frac{c(x)\sin x}{\cos^2(x)} = \frac{c'(x)}{\cos(x)} + y_\mathrm{p}(x)\tan(x).$$

Subtraktion von $y_\mathrm{p}(x)\tan(x)$ und anschliessende Multiplikation mit $\cos(x)$ zeigt

$$c'(x) = 4\sin(x)\cos(x) = \left(-2\cos^2(x)\right)'.$$

Folglich ist $c(x) = -2\cos^2(x)$ eine Stammfunktion und wir erhalten als partikuläre Lösung

$$y_\mathrm{p}(x) = \frac{-2\cos^2(x)}{\cos(x)} = -2\cos(x).$$

• Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = y_\mathrm{h}(x) + y_\mathrm{p}(x) = \frac{c}{\cos(x)} - 2\cos(x), \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

Der Anfangswert

$$1 \overset{!}{=} y(0) = \frac{c}{\cos(0)} - 2\cos(0) = c - 2$$

wird für $c = 3$ angenommen. Die gesuchte Lösung ist

$$y(x) = \frac{3}{\cos(x)} - 2\cos(x), \quad x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$