3.1. Differentialgleichung

(a) Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3}{2x} \cdot y - \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{y}, \quad x > 0$$

ist in dieser Form weder linear, noch separierbar.

(b) Sei $u(x) = \frac{1}{x} y(x)$. Dann ist $y' = (xu)' = u + xu'$ und die Gleichung impliziert

$$u + xu' = \frac{3u}{2} - \frac{1}{2u}.$$

Die neue Gleichung für u ist separierbar:

$$u' = \left(\frac{u}{2} - \frac{1}{2u}\right)\frac{1}{x}, \quad x > 0. \tag{†}$$

Wir erhalten eine konstante Lösungen $u(x) = \pm 1$. Falls $u(x) \neq \pm 1$, so gilt

$$\frac{2u\,u'}{u^2 - 1} = \frac{u'}{\left(\frac{u}{2} - \frac{1}{2u}\right)} = \frac{1}{x},$$

Die Substitution $z(x) = (u(x))^2$ mit $z' = 2u\,u'$ zeigt

$$\log|u^2 - 1| = \int \frac{2u(x)\,u'(x)}{u(x)^2 - 1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$|u^2 - 1| = e^C x, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$u^2 = cx + 1, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Da $u(x) = \pm 1$ ebenfalls Lösungen sind, lassen wir $c = 0$ zu und erhalten

$$u(x) = \pm\sqrt{cx + 1}, \quad c \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung von Gleichung (†). Somit sind für $x > 0$

$$y(x) = x\,u(x) = x\sqrt{cx + 1} = \sqrt{cx^3 + x^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

positive Lösungen der ursprünglichen Gleichung. Um die Bedingung $y'(\frac{2}{3}) = 0$ zu erfüllen, berechnen wir

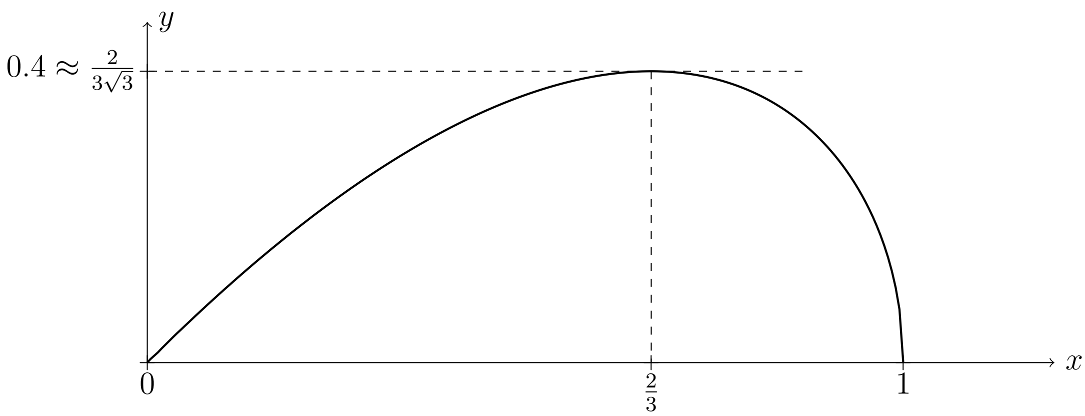
$$y'(x) = \frac{3cx^2 + 2x}{2\sqrt{cx^3 + x^2}}, \qquad y'(\tfrac{2}{3}) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3c \cdot \tfrac{4}{9} + 2 \cdot \tfrac{2}{3} = 0 \;\Leftrightarrow\; c = -1.$$

Die gesuchte Lösung ist $y(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$, definiert für $x \in \,]0, 1[$.

(c) Nach Voraussetzung ist $x > 0$, also ist die Lösung $y(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ auf $]0,1[$ definiert. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{0<x\to 0} y(x) &= \lim_{0<x\to 0} \sqrt{x^2 - x^3} = 0, \\
\lim_{0<x\to 0} y'(x) &= \lim_{0<x\to 0} \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}} = \lim_{0<x\to 0} \frac{2 - 3x}{2\sqrt{1-x}} = 1, \\
\lim_{1>x\to 1} y(x) &= \lim_{1>x\to 1} \sqrt{x^2 - x^3} = 0, \\
y'(x) &= \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}} = \frac{2 - 3x}{2\sqrt{1-x}} \xrightarrow{1>x\to 1} -\infty,
\end{aligned}$$

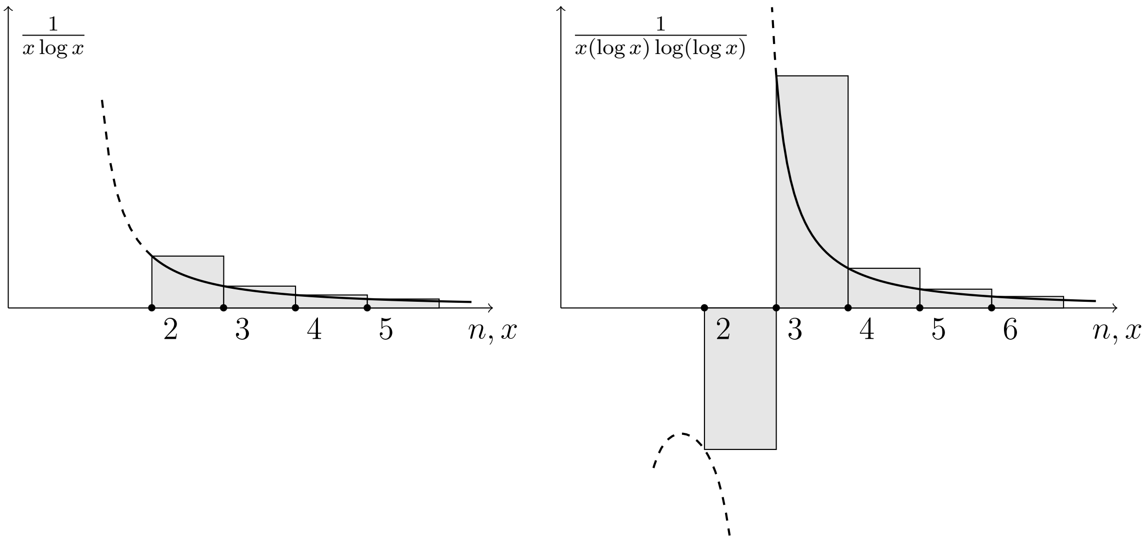
das heisst, die Funktion ist zwar an den Randpunkten des Definitionsbereichs stetig ergänzbar, ihre Ableitung am Randpunkt $x = 1$ jedoch nicht. Wir erhalten folgendes Bild.



3.2. Reihenabschätzung Die Funktion $f\colon\ [2,\infty[\ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x\log x}$ ist als Produkt der positiven, monoton fallenden Funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}$ und $x \mapsto \frac{1}{\log x}$ auch positiv und monoton fallend. Für alle $\mathbb{N} \ni n \geq 2$ gilt insbesondere

$$\begin{aligned}
\forall x \in [n, n+1] : \quad & \frac{1}{x\log x} \leq \frac{1}{n\log n}, \\
\Rightarrow \int_n^{n+1} & \frac{1}{x\log x}\,dx \leq \frac{1}{n\log n} \cdot \big((n+1) - n\big) = \frac{1}{n\log n}, \\
\Rightarrow \int_2^{N+1} & \frac{1}{x\log x}\,dx \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\log n}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass das Integral auf der linken Seite für $N \to \infty$ divergiert. Wegen obiger Ungleichung divergiert dann auch die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$.



Analog ist $g\colon\ [3,\infty[\ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \frac{1}{x(\log x)\log(\log x)}$ positiv und monoton fallend. Wegen $\log(\log e) = 0$ fangen wir allerdings erst bei $x = 3$ an zu integrieren und erhalten die Abschätzung

$$\int_3^{N+1} \frac{1}{x(\log x)\log(\log x)}\,dx \leq \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n(\log n)\log(\log n)}.$$

Dann ist

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(\log n)\log(\log n)} \geq \frac{1}{2(\log 2)\log(\log 2)} + \int_3^{N+1} \frac{1}{x(\log x)\log(\log x)}\,dx$$

und wir können ebenfalls folgern, dass die Reihe divergiert, falls der Wert des Integrals für $N \to \infty$ divergiert.

Für das erste Integral substituieren wir $y(x) = \log x$ mit $y'(x) = \frac{1}{x}$ und erhalten

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_{\log(2)}^{\log(N+1)} \frac{1}{y}\,dy = \log|\log(N+1)| - \log|\log 2| \xrightarrow{N\to\infty} \infty.$$

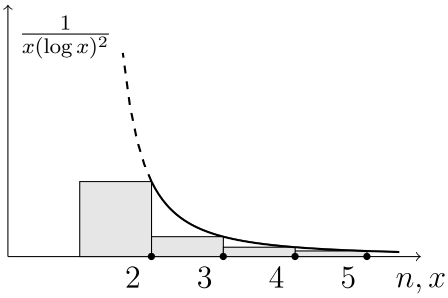
Im zweiten Integral substituieren wir $z(x) = \log(\log x)$ mit $z'(x) = \frac{1}{x\log x}$.

$$\begin{aligned}\int_3^{N+1} \frac{1}{x(\log x)\log(\log x)}\,dx &= \int_{\log(\log 3)}^{\log(\log(N+1))} \frac{1}{z}\,dz \\ &= \log\Big|\log\Big(\log(N+1)\Big)\Big| - \log|\log(\log 3)| \xrightarrow{N\to\infty} \infty.\end{aligned}$$

Auch die Funktion $h\colon\ [2,\infty[\ \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}$ ist positiv und monoton fallend.

Für alle $\mathbb{N} \ni n \geq 3$ gilt insbesondere

$$\begin{aligned}
\forall x \in [n-1, n]: \quad & \frac{1}{n(\log n)^2} \leq \frac{1}{x(\log x)^2}, \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{n(\log n)^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx \\
\Rightarrow \quad \sum_{n=3}^{N} & \frac{1}{n(\log n)^2} \leq \int_{2}^{N} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx
\end{aligned}$$



Wir substituieren wieder $y(x) = \log x$ mit $y'(x) = \frac{1}{x}$ und erhalten

$$\forall N \geq 2: \quad \int_{2}^{N} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx = \int_{\log(2)}^{\log(N)} \frac{1}{y^2}\, dy = -\frac{1}{\log(N)} + \frac{1}{\log(2)} \leq \frac{1}{\log(2)}.$$

Folglich konvergiert die Reihe und ist beschränkt durch

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \leq \frac{1}{2(\log 2)^2} + \frac{1}{\log 2}.$$

3.3. Uneigentliche Integrale

(a) Die Abbildung $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, da der Nenner strikt positiv ist. Zur Berechnung des Integrals substituieren wir $y(x) = x^2$ mit $y'(x) = 2x$ und erhalten

$$\int_{-R}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{R^2}^{0} \frac{1}{1+y}\, dy = -\frac{1}{2} \log|1+R^2| \xrightarrow{R\to\infty} -\infty.$$

Also ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dx$ nicht konvergent.

(b) $x \mapsto x^{-2} e^{-\frac{1}{x}}$ ist stetig für $x > 0$, ist aber für $x \to 0$ unbeschränkt. $\int_0^\infty x^{-2} e^{-\frac{1}{x}}\, dx$ ist also auf beiden Seiten uneigentlich. Wir substituieren $u(x) = -\frac{1}{x}$ mit $u'(x) = x^{-2}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx &= \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{-1} e^u\, du = e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} e^{-1}, \\
\int_{1}^{R} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx &= \int_{-1}^{-\frac{1}{R}} e^u\, du = e^{-\frac{1}{R}} - e^{-1} \xrightarrow{R\to\infty} 1 - e^{-1}.
\end{aligned}$$

Folglich ist das uneigentliche Integral konvergent mit Grenzwert $e^{-1} + 1 - e^{-1} = 1$.

(c) Der Nenner $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$ ist strikt positiv, also ist der Integrand stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und ausserdem spiegelsymmetrisch bezüglich $x = -1$.

$$\int_{-1}^{R} \frac{1}{(x+1)^2 + 1}\, dx = \arctan(R + 1) - \arctan(0) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{\pi}{2}$$

Folglich konvergiert $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

(d) Die Funktion $\frac{1}{x^2-2x+1} = (x - 1)^{-2}$ ist für $x \to 1$ unbeschränkt. Es gilt

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \Big[-\frac{1}{x-1}\Big]_{1+\varepsilon}^{2} = -1 + \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \infty.$$

Das uneigentliche Integral $\int_{-2}^{2} (x - 1)^{-2}\, dx$ existiert folglich nicht.

3.4. Konvergenz

(a) Die Funktion $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ ist zwar unstetig bei $x = 0$ und *nicht* stetig ergänzbar, aber beschränkt durch $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$. Wir zeigen, dass für jede Folge $0 < x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$J_n := \int_{x_n}^{\frac{1}{\pi}} \sin(\tfrac{1}{x})\, dx$$

eine reelle Cauchy-Folge definiert und folglich für $n \to \infty$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$. Dann gilt auch

$$|J_m - J_n| = \Big|\int_{x_m}^{x_n} \sin(\tfrac{1}{x})\, dx\Big| \leq \int_{x_m}^{x_n} \Big|\sin(\tfrac{1}{x})\Big|\, dx \leq |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Folglich konvergiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin(\tfrac{1}{x})\, dx.$

(b) Die Funktion $f\colon x \mapsto (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$ ist stetig auf $]0, 1]$ und zweimalige Anwendung des Satzes von Bernoulli–de l'Hôpital [vgl. Analysis 1, Aufgabe 11.4 (f)] zeigt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2\cos(x) + x\sin(x)} = \frac{0}{2+0} = 0.
\end{aligned}$$

Folglich kann f mit $0 \mapsto 0$ zu $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig ergänzt werden und ist damit Riemann-integrabel.

(c) Der Integrand $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$ ist als Komposition stetiger Funktionen für alle $x \geq 1$ stetig. Zu überprüfen ist, ob $\int_1^R f(x)\,dx$ für $R \to \infty$ beschränkt bleibt. Dazu schätzen wir den Integranden durch eine Funktion ab, die wir explizit integrieren können. Für alle $x \geq 1$ gilt

$$0 \leq f(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} = \frac{2}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} \leq \frac{2}{x\sqrt{x}} = 2x^{-\frac{3}{2}}$$

Weil $\int_\infty^1 2x^{-\frac{3}{2}}\,dx$ konvergiert (Beispiel 6.4.1.), so konvergiert auch $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

(d) Sei $s > 0$. Partielle Integration zeigt

$$\int_1^R \frac{\sin(x)}{x^s}\,dx = \left[\frac{-\cos(x)}{x^s}\right]_1^R - s\int_1^R \frac{\cos(x)}{x^{s+1}}\,dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist für $R \to \infty$ absolut konvergent, denn

$$\int_1^R \left|\frac{\cos(x)}{x^{s+1}}\right| dx \leq \int_1^R \frac{1}{x^{s+1}}\,dx \leq \frac{1}{s} \qquad \forall R > 0.$$

Folglich konvergiert auch das gegebene uneigentliche Integral und zwar gegen

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\sin(x)}{x^s}\,dx = \cos(1) - s\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^{s+1}}\,dx.$$