4.1. Gammafunktion

(a) (i) Der Integrand $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$ ist für alle $x > 0$ eine positive, stetige Funktion in $t \in]0, \infty[$. Es genügt daher zu zeigen, dass das uneigentliche Integral über $]0, \infty[$ beschränkt ist. Im Fall $0 < x < 1$ ist das Integral auch am unteren Rand uneigentlich, da $f(t) \to \infty$ für $t \to 0$. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt die Abschätzung

$$\int_\varepsilon^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \leq \int_\varepsilon^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}(1^x - \varepsilon^x) \leq \frac{1}{x},$$

das heisst, auf der linken Seite konvergiert das uneigentliche Integral. Sei nun $x > 0$ beliebig. Die Funktion $g(t) = t^{x-1}e^{-\frac{1}{2}t}$ ist stetig in $t \in [1, \infty[$ und es gilt $g(t) \to 0$ für $t \to \infty$ [vgl. Beispiel 3.2.2. iv]. Folglich ist $g(t)$ beschränkt in $t \in [1, \infty[$, das heisst, es existiert eine Konstante $C(x) \in \mathbb{R}$, sodass $\forall t \geq 1: \ t^{x-1}e^{-\frac{1}{2}t} \leq C(x)$. Mit $R > 1$ gilt

$$\int_1^R t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_1^R \underbrace{t^{x-1}e^{-\frac{1}{2}t}}_{g(t)} e^{-\frac{1}{2}t}\,dt \leq C(x)\int_1^R e^{-\frac{1}{2}t}\,dt \leq 2C(x)\,e^{-\frac{1}{2}},$$

das heisst, auch für $R \to \infty$ konvergiert das Integral. $\Gamma(x)$ ist somit wohldefiniert.

(ii) Sei $x > 0$. Partielle Integration, bei der wir den Faktor t^x ableiten, zeigt

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R t^x e^{-t}\,dt &= \lim_{R\to\infty}\Big[-t^x e^{-t}\Big]_0^R - \lim_{R\to\infty}\int_0^R x t^{x-1}(-e^{-t})\,dt \\ &= 0 - 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\,\Gamma(x).\end{aligned}$$

(iii) Gemäss (ii) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = \ldots = n!\,\Gamma(1).$$

Die Behauptung $\Gamma(n+1) = n!$ folgt dann aus

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{R\to\infty}\Big(-e^{-R} + e^{-0}\Big) = 1.$$

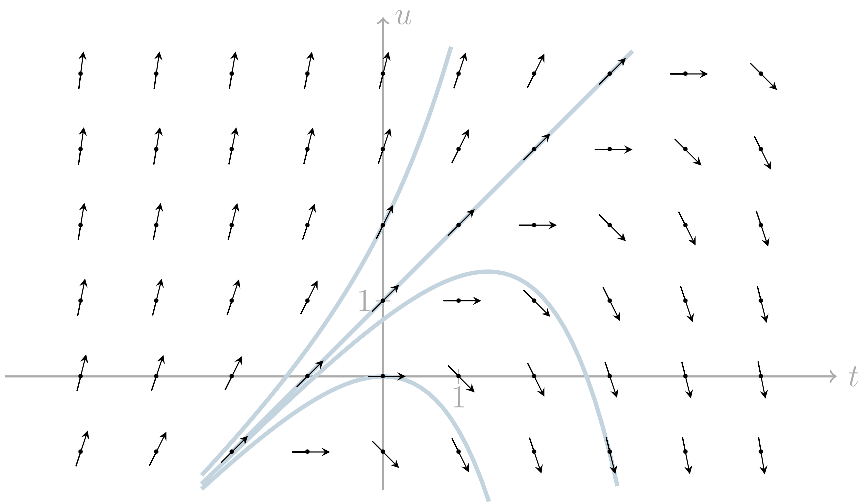
(b) Da bereits gezeigt wurde, dass das uneigentliche Integral für $\Gamma(\frac{1}{2})$ konvergiert, dürfen wir $y(t) = \sqrt{t}$ mit $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ substituieren und erhalten

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty \frac{2e^{-t}}{2\sqrt{t}}\,dt = \int_0^\infty 2e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi},$$

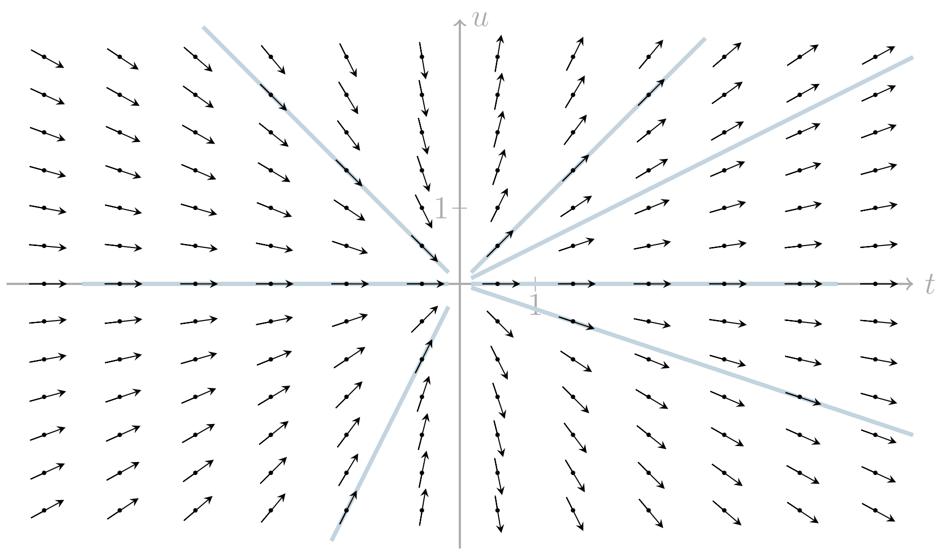
wobei Spiegelsymmetrie von e^{-y^2} bezüglich $y = 0$ ausgenutzt wird.

4.2. Richtungsfelder

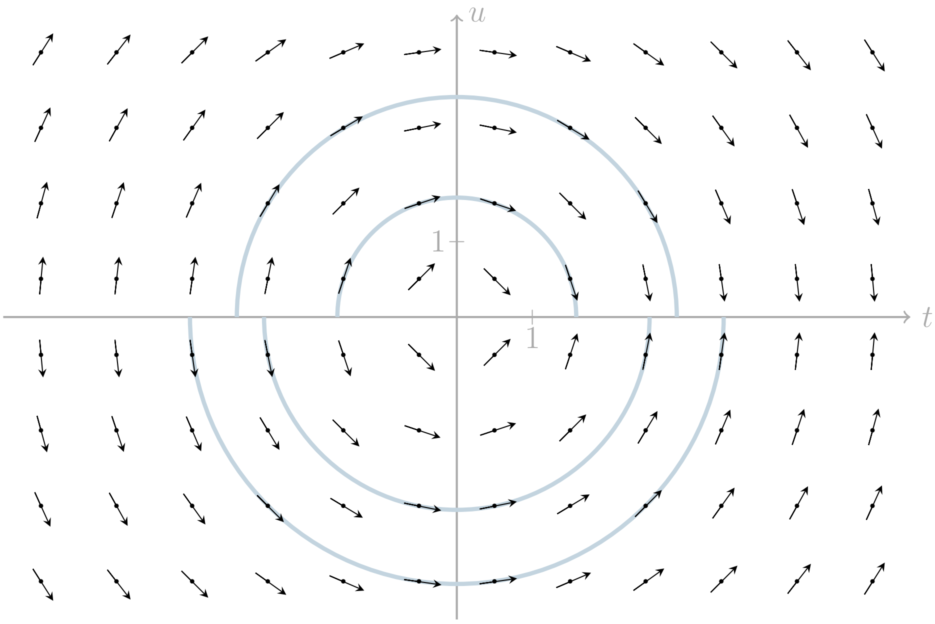
(a) Die Gleichung $u'(t) = u(t) - t$ ist linear. Gemäss Beispiel 6.5.4. iv ist der Satz von Picard–Lindelöf anwendbar. Die Lösungen einer linearen Gleichung mit (beschränkten Koeffizienten) wachsen höchstens exponentiell und existieren somit für alle Zeiten. Das zugehörige Richtungsfeld (also die Richtung der Tangente, falls die Lösung durch den jeweiligen Punkt geht) mit einigen Lösungskurven sieht so aus:



(b) Da die Gleichung $u'(t) = \frac{u(t)}{t}$ nur für $t \neq 0$ definiert ist, existieren differenzierbare Lösungen nur für $t > 0$ oder $t < 0$. Auf jedem (festen) Zeitintervall $[\delta, \infty[$ beziehungsweise $]-\infty, -\delta]$ mit $\delta > 0$ ist die Gleichung linear mit stetigem Koeffizienten. Somit ist der Satz von Picard–Lindelöf lokal anwendbar, wenn wir Anfangsdaten $u(t_0) = u_0$ bei $t_0 \neq 0$ vorgeben.



(c) Das Geschwindigkeitsfeld $f(t,u) = -\frac{t}{u}$ ist in u nicht (lokal) Lipschitz stetig nahe 0. Der Satz von Picard–Lindelöf ist damit nicht anwendbar. Die Gleichung $u'(t) = -\frac{t}{u(t)}$ hat für Anfangsdaten $u_0 > 0$ Halbkreise um den Ursprung als lokale Lösungen. Diese existieren nur auf einem beschränkten Zeitintervall.



4.3. Freier Fall

(a) Seien $g, c > 0$. Das Geschwindigkeitsfeld $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ mit $f(t,v) = g - c\,v^2$ ist unabhängig von t und stetig differenzierbar in v. Wie in Beispiel 6.5.4. ii) folgt lokale Lipschitz-Stetigkeit aus dem Mittelwertsatz: Sei $v_0 \in \mathbb{R}^1$ beliebig. Für jedes $r_0 > 0$ und beliebige $u, v \in B_{r_0}(v_0)$ gilt $|f(u) - f(v)| \leq L|u - v|$ mit

$$L = \sup_{w\in B_{r_0}(v_0)} |f'(v)| = \sup_{w\in B_{r_0}(v_0)} |-2cv| = 2c\Big(|v_0| + r_0\Big).$$

Folglich ist der Satz von Picard–Lindelöf anwendbar.

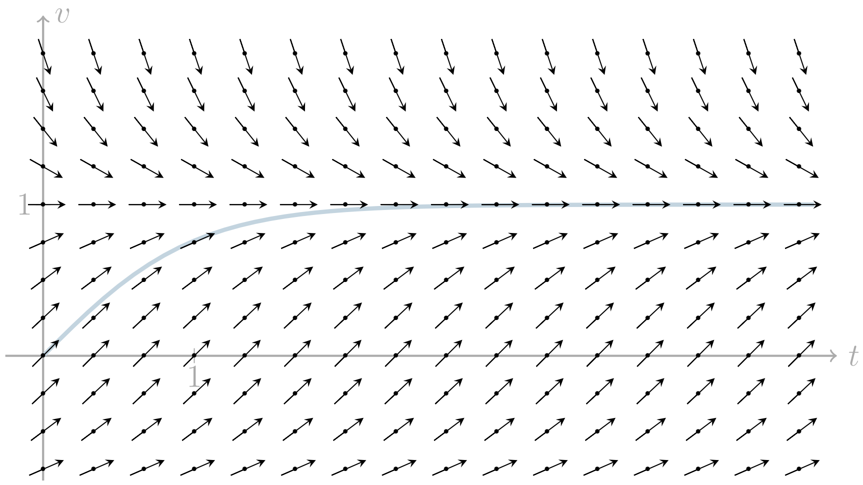
(b) Zum Anfangswertproblem $v'(t) = f(t, v(t))$, $v(0) = v_0$ betrachten wir

$$\Big(\Phi_{v_0}(\varphi)\Big)(t) = v_0 + \int_0^t f(s,\varphi(s))\,ds.$$

In unserem Fall ist $f(t, v) = 1 - v^2$ und $v_0 = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \Phi_0(0)(t) = \int_0^t 1 - 0^2\, ds = t, \\
\varphi_2(t) &= \Phi_0(\varphi_1)(t) = \int_0^t 1 - s^2\, ds = t - \tfrac{1}{3}t^3, \\
\varphi_3(t) &= \Phi_0(\varphi_2)(t) = \int_0^t 1 - \left(s - \tfrac{1}{3}s^3\right)^2 ds \\
&= \int_0^t 1 - s^2 + \tfrac{2}{3}s^4 - \tfrac{1}{9}s^6\, ds = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{15}t^5 - \tfrac{1}{63}t^7.
\end{aligned}$$

(c) Das Richtungsfeld und die Lösungskurve zu $v(0) = 0$ erinnern an $\tanh(t)$.



Die rechte Seite der Gleichung $v' = g - c\,v^2 = g(1 - \frac{c}{g}v^2)$ verschwindet nur für $v^2 = \frac{g}{c}$. Wegen $v(0) = 0$ nehmen wir $v^2 < \frac{g}{c}$ an und erhalten via Trennung der Variablen

$$\int \frac{v'(t)}{1 - \frac{c}{g}v(t)^2}\, dt = \int g\, dt = gt + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Substituieren wir $y = \sqrt{\frac{c}{g}}v$, so folgt auf der anderen Seite

$$\int \frac{v'(t)}{1 - \frac{c}{g}v(t)^2}\, dt = \int \frac{\sqrt{\frac{g}{c}}}{1 - y^2}\, dy = \sqrt{\tfrac{g}{c}}\,\mathrm{atanh}(y) = \sqrt{\tfrac{g}{c}}\,\mathrm{atanh}\Big(\sqrt{\tfrac{c}{g}}v\Big).$$

Es folgt $\sqrt{\frac{c}{g}}v = \tanh\Big(\sqrt{\frac{c}{g}}(gt + K)\Big)$. Die Anfangsbedingung $v(0) = 0$ impliziert $K = 0$ und wir erhalten als Lösung

$$v(t) = \sqrt{\tfrac{g}{c}}\,\tanh(\sqrt{cg}\,t).$$

4.4. Fixpunkte Wir wenden jeweils den Fixpunktsatz von Banach auf einem geeigneten Intervall an.

(a) Zu $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x) + x}$ berechnen wir die Ableitung

$$f'(x) = \frac{\cos(x) + 1}{2\sqrt{1 + \sin(x) + x}}$$

und sehen $f'(0) = 1$. Folglich ist f nicht auf dem ganzen Definitionsbereich $[0, \infty[$ eine Kontraktion. Wir schränken f stattdessen auf $M = [1, \infty[$ ein. Zu zeigen ist:

- $f(M) \subset M$
- $f|_M \colon M \to M$ ist eine Kontraktion.
- Im Intervall $[0, \infty[\setminus M = [0, 1[$ hat f keine Fixpunkte.

Da $M \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist, folgt dann Existenz genau eines Fixpunkts aus dem Satz von Banach.

Für $x \in [0, \pi]$ ist $\sin(x) \geq 0$. Im Allgemeinen ist $\sin(x) \geq -1$. Folglich gilt

$$\left.\begin{array}{ll} \forall x \in [0, \pi]: & f(x) \geq \sqrt{1 + x} \geq 1 \\ \forall x > \pi: & f(x) \geq \sqrt{\pi} \geq 1 \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \ \forall x \geq 0: \quad f(x) \geq 1.$$

Daraus folgt zum einen $f(M) \subset M$ und zum anderen, dass es im Intervall $[0, 1[$ keine Fixpunkte geben kann. Es verbleibt die Kontraktionseigenschaft zu zeigen. Dazu schätzen wir $|f'|$ ab. Für $x \in [1, \pi] \subset [\frac{\pi}{4}, \pi]$ ist $\cos(x) \in [-1, \frac{1}{2}]$, also $|\cos(x) + 1| \leq \frac{3}{2}$.

$$\begin{array}{ll} \forall x \in [1, \pi]: & |f'(x)| \leq \dfrac{|\cos(x) + 1|}{2\sqrt{1 + \sin(x) + x}} \leq \dfrac{3}{4} \\ \forall x > \pi: & |f'(x)| \leq \dfrac{2}{2\sqrt{1 + \sin(x) + \pi}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} < \dfrac{3}{4} \end{array}$$

Damit ist $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ für alle $x \in M$. Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass $f|_M$ eine Kontraktion ist, denn zu jedem Paar $x, y \in M$ existiert ein $\xi \in]x, y[$ sodass

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| \leq \tfrac{3}{4}|x - y|.$$

(b) Auf dem offenen Intervall $]0, 1[$ ist der Fixpunktsatz von Banach nicht anwendbar. Daher definieren wir auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-x^2 \sin \frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{10}, & x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{10}e^1 < 1$ für alle $x \in [0,1]$, das heisst, $f\colon [0,1] \to [0,1]$. f ist stetig bei $x = 0$, denn $y \mapsto \frac{1}{10}e^y$ ist stetig und $-x^2 \sin(\frac{1}{x}) \to 0$ für $x \to 0$. Zudem ist f differenzierbar für $x \in]0,1[$ mit Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{10}\Big(-2x\sin(\tfrac{1}{x}) + \cos(\tfrac{1}{x})\Big)e^{-x^2\sin\frac{1}{x}},$$
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{10}\Big(|2x\sin(\tfrac{1}{x})| + |\cos(\tfrac{1}{x})|\Big)e^{-x^2\sin\frac{1}{x}} \leq \frac{3e}{10} < 1.$$

Für jedes Paar $x, y \in [0,1]$ folgt aus dem Mittelwertsatz Existenz von $\xi \in]0,1[$ mit

$$|f(x) - f(y)| = |f(\xi)(x-y)| \leq \frac{3e}{10}|x-y|.$$

Folglich ist $f\colon [0,1] \to [0,1]$ eine Kontraktion und hat gemäss des Satzes von Banach genau einen Fixpunkt $\overline{x} \in [0,1]$. Wegen $f(0) = \frac{1}{10}$ und $f(1) < 1$ ist $\overline{x} \in]0,1[$. Als eindeutiger Fixpunkt von f ist $\overline{x}$ die einzige Lösung der Gleichung $x = \frac{1}{10}\,e^{-x^2\sin\frac{1}{x}}$ im Intervall $]0,1[$.