5.1. Erste partielle Ableitungen

(a) $f(x, y) = \pi x^2$ ist definiert im $\mathbb{R}^2$ und es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\pi x$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

(b) $f(x, y) = e^{xy}$ ist definiert im $\mathbb{R}^2$ und es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$.

(c) $f(x, y) = x^y$ ist definiert (und partiell differenzierbar) für $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$, also auf $D =]0, \infty[\times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{y \log x} = e^{y \log x}(\log x) = x^y(\log x).$$

(d) $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ ist definiert für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{(x^2 + y^2) - 2x(x - y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + 2xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-(x^2 + y^2) - 2y(x - y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 - 2xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

(e) $f(x, y) = x^2 y \sin(xy)$ ist definiert für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \sin(xy) + x^2 y^2 \cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 \sin(xy) + x^3 y \cos(xy).$$

(f) $f(x, y, z) = xy^2 z^3 + y$ ist definiert für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^2 z^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xyz^3 + 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3xy^2 z^2.$$

5.2. Zweite partielle Ableitungen

(a) Die ersten partiellen Ableitungen von $f(x, y) = x^2 e^{y \sin x}$ sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x + x^2 y \cos x)e^{y \sin x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2 \sin x)e^{y \sin x}.$$

Für die gemischten zweiten Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \Big(x^2 \cos x + (2x + x^2 y \cos x) \sin x\Big) e^{y \sin x}, \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \Big(2x \sin x + x^2 \cos x + x^2 (\sin x) y (\cos x)\Big) e^{y \sin x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \end{aligned}$$

das heisst, die Differentiationsreihenfolge spielt hier also keine Rolle.

(b) An Stellen $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$f(x, y) = \frac{xy}{2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{xy}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{xy}{2} - \frac{xy^3}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{2} - \frac{y^3(x^2 + y^2) - 2x\, xy^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y}{2} - \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{2} - \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - 2y\, xy^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x}{2} - \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{2} - \frac{(5y^4 - 3x^2y^2)(x^2 + y^2) - 4y(y^5 - x^2y^3)}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{6x^2y^4 + y^6 - 3x^4y^2}{(x^2 + y^2)^3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{2} - \frac{(9x^2y^2 + y^4)(x^2 + y^2) - 4x(3x^3y^2 + xy^4)}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{-3x^4y^2 + 6x^2y^4 + y^6}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y).\end{aligned}$$

Folglich gilt $f_{xy} = f_{yx}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

An der Stelle $(0, 0)$ können die partiellen Ableitung von f nur über den Differentialquotienten berechnet werden. Für alle $h \in \mathbb{R}$ gilt $f(h, 0) = 0 = f(0, h)$. Es folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Des Weiteren gilt $f_x(0, h) = \frac{h}{2} - \frac{h^5}{h^4} = -\frac{h}{2}$ und $f_y(h, 0) = \frac{h}{2} - 0 = \frac{h}{2}$. Folglich ist

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{h}{2} - 0}{h} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2} - 0}{h} = \frac{1}{2} \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

An der Stelle $(0, 0)$ stimmen die gemischten zweiten partiellen Ableitungen von f somit *nicht* überein.

5.3. Richtungsableitung Die Richtungsableitung $D_v f(x)$ existiert genau dann, falls die Funktion $\varphi\colon [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(t) = f(x + tv)$ an der Stelle $t = 0$ differenzierbar ist, denn es gilt

$$\varphi'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} = D_v f(x).$$

(a) Mit $f(x, y) = \cos(xy) + x^2$ und $v = (v_1, v_2)$ gilt an der Stelle $(x, y) = (\pi, 3)$

$$\varphi(t) = f(\pi + tv_1, 3 + tv_2) = \cos\Big((\pi + tv_1)(3 + tv_2)\Big) + (\pi + tv_1)^2$$

Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist φ differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\Big(v_1(3 + tv_2) + v_2(\pi + tv_1)\Big) \sin\Big((\pi + tv_1)(3 + tv_2)\Big) + 2(\pi + tv_1)v_1,\\ \varphi'(0) &= -(3v_1 + \pi v_2)\sin(3\pi) + 2\pi v_1 = 2\pi v_1.\end{aligned}$$

Folglich existieren an der Stelle $(\pi, 3)$ alle Richtungsableitungen von f. Es folgt

$$\begin{aligned} D_{(1,1)}f(\pi, 3) &= 2\pi, & D_{(2,0)}f(\pi, 3) &= 4\pi,\\ \frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 3) = D_{(1,0)}f(\pi, 3) &= 2\pi, & \frac{\partial f}{\partial y}(\pi, 3) = D_{(0,1)}f(\pi, 3) &= 0.\end{aligned}$$

Wir beobachten

$$D_{(v_1,v_2)}f(\pi, 3) = 2\pi v_1 + 0v_2 = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 3) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(\pi, 3).$$

(b) Mit $f(x, y) = 2x^2y + 3xy + y$ und $v = (v_1, v_2)$ gilt an der Stelle $(x, y) = (2, 1)$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(2 + tv_1, 1 + tv_2)\\ &= 2(2 + tv_1)^2(1 + tv_2) + 3(2 + tv_1)(1 + tv_2) + (1 + tv_2).\end{aligned}$$

Als Polynom ist $\varphi(t)$ differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= 4v_1(2 + tv_1)(1 + tv_2) + 2v_2(2 + tv_1)^2 + 3v_1(1 + tv_2) + 3v_2(2 + tv_1) + v_2\\ \varphi'(0) &= 8v_1 + 8v_2 + 3v_1 + 6v_2 + v_2 = 11v_1 + 15v_2.\end{aligned}$$

Folglich existieren an der Stelle $(2, 1)$ alle Richtungsableitungen von f. Es folgt

$$\begin{aligned} D_{(1,1)}f(2, 1) &= 26, & D_{(1,2)}f(2, 1) &= 41,\\ \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = D_{(1,0)}f(2, 1) &= 11, & \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = D_{(0,1)}f(2, 1) &= 15.\end{aligned}$$

Wieder gilt

$$D_{(v_1,v_2)}f(2, 1) = 11v_1 + 15v_2 = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1).$$

5.4. Velo im Schnee 🚲

(a) Der Vektor $\alpha(t) - \beta(t) = L\,v(t)$ ist der Verbindungsvektor zwischen Vorder- und Hinterrad und zeigt daher in die Richtung des Velos. In diese Richtung muss auch das Hinterrad fahren, da es fest mit dem Velo verbunden ist. Folglich ist $\dot\beta(t)$ parallel zu $v(t)$, das heisst, zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$ existiert ein Faktor $f(t) \in \mathbb{R}$, sodass $\dot\beta(t) = f(t)v(t)$. Wegen $|\alpha(t) - \beta(t)| = L$ ist $v(t)$ ein Einheitsvektor und es folgt $f(t) = |\dot\beta(t)|$, also

$$\dot\beta(t) = f(t)v(t) = \frac{|\dot\beta(t)|}{L}\Big(\alpha(t) - \beta(t)\Big).$$

$f(t) = |\dot\beta(t)|$ ist der Betrag der momentanen Geschwindigkeit und $v(t)$ die Bewegungsrichtung des Hinterrads.

(b) Der Abstand $L = |\alpha(t) - \beta(t)|$ der Räder ist konstant in t. Schreiben wir $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\Big|\alpha(t) - \beta(t)\Big|^2 = 2\Big\langle \alpha(t) - \beta(t), \dot\alpha(t) - \dot\beta(t)\Big\rangle, \\ \Rightarrow\ \Big\langle \alpha(t) - \beta(t), \dot\alpha(t)\Big\rangle &= \Big\langle \alpha(t) - \beta(t), \dot\beta(t)\Big\rangle = \Big\langle L\,v(t), f(t)v(t)\Big\rangle = L\,f(t), \\ \Rightarrow\ f(t) &= \frac{1}{L}\Big\langle \alpha(t) - \beta(t), \dot\alpha(t)\Big\rangle. \end{aligned}$$

(c) Das Velo kam von rechts.

Beweis. Angenommen, das Velo kam aus der anderen Richtung. Sei τ der Zeitpunkt, ab dem das Vorderrad auf der x-Achse fährt. Für alle $t > \tau$ verschwindet dann die zweite Komponente $\alpha_2(t) = 0 = \dot\alpha_2(t)$. Ausserdem gilt $\alpha_1(t) > 0$ und $\beta_2(\tau) > 0$, denn das Velo fährt gemäss Annahme nach rechts und das Hinterrad hat die x-Achse zum Zeitpunkt τ noch nicht erreicht. Wir betrachten die Gleichung für β_2 zu Zeiten $t > \tau$.

$$\begin{aligned} \dot\beta_2(t) &= \frac{f(t)}{L}\Big(\alpha_2(t) - \beta_2(t)\Big) = \frac{1}{L^2}\Big\langle \alpha(t) - \beta(t), \dot\alpha(t)\Big\rangle\Big(\alpha_2(t) - \beta_2(t)\Big) \\ &= \frac{1}{L^2}\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1(t) - \beta_1(t) \\ 0 - \beta_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot\alpha_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Big(0 - \beta_2(t)\Big) \\ &= -\frac{1}{L^2}\Big(\alpha_1(t) - \beta_1(t)\Big)\dot\alpha_1(t)\,\beta_2(t) = -g(t)\,\beta_2(t), \end{aligned}$$

wobei

$$0 < g(t) \le \frac{1}{L^2}\Big|\alpha(t) - \beta(t)\Big|\dot\alpha_1(t) \le \frac{1}{L}\sup_{t>\tau}\Big(\dot\alpha_1(t)\Big) =: A.$$

Für alle $t > \tau$ folgt $\dot\beta_2(t) \ge -A\,\beta_2(t)$ und damit $\frac{d}{dt}(e^{At}\beta_2) = e^{At}(A\beta_2 + \dot\beta_2) > 0$, also $\beta_2(t) \ge \beta_2(\tau)\,e^{-A(t-\tau)} > 0$ im Widerspruch zur Zeichnung in der $\beta_2(t)$ Null wird. □