6.1. Differential Es gilt

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & \text{falls } xy > 0, \\ 0, & \text{falls } xy = 0, \\ -xy, & \text{falls } xy < 0. \end{cases}$$

In der Teilmenge $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ xy > 0\}$ existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

und sind stetig in A. Daher ist f differenzierbar in A mit Differential $df|_A = (y,x)$. In der Teilmenge $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ xy < 0\}$ existieren analog

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x$$

und sind stetig. Folglich ist f differenzierbar in B mit Differential $df|_B = (-y,-x)$. Auf $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \neq 0\}$ und $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y \neq 0\}$ ist f nicht differenzierbar, denn

$$\frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \frac{|xh| - 0}{h} = \frac{|h|}{h} \cdot |x|, \qquad \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \frac{|h|}{h} \cdot |y|$$

haben keinen Grenzwert für $h \to 0$. Es verbleibt Differenzierbarkeit im Ursprung zu untersuchen. Wegen $0 \leq (x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$ gilt $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Es folgt

$$\left|\frac{f(x,y) - f(0,0)}{\|(x,y)\|}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0.$$

Also ist f differenzierbar im Nullpunkt mit Differential $df(0,0) = (0,0)$. Insgesamt ist f differenzierbar auf $A \cup B \cup \{(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ xy \neq 0 \ \vee\ (x,y) = (0,0)\}$.

6.2. Unstetige Ableitungen

(a) An Stellen $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big).$$

Dort existieren die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) + (x^2+y^2)\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) \cdot \frac{2x}{-2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2x\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big),$$

welche auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig sind. Insbesondere ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar. Um Differenzierbarkeit in $(0,0)$ nachzuweisen, betrachten wir

$$\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\|(x,y)\|}\right| = \left|\frac{(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0.$$

Dies impliziert Differenzierbarkeit an der Stelle $(0,0)$ mit Differential $df(0,0)=(0,0)$.

(b) Wie in (a) bemerkt, sind die partiellen Ableitungen von f stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Die partiellen Ableitungen sind jedoch unstetig in $(0,0)$. In der Tat gilt für $x>0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Der Term $-\cos(\frac{1}{x})$ ist nicht konvergent für $(x,0)\to(0,0)$. Folglich ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig an der Stelle $(0,0)$ und f nicht von der Klasse C^1.

6.3. Kettenregel

(a) Das Differential von $f(x,y)=x^2+y^2$ ist $df(x,y)=(2x,2y)$. Aus der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big) = df\big(x(t),y(t)\big)\cdot\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix} = 2x(t)\,x'(t)+2y(t)\,y'(t).$$

Die Ableitung von $x(t)=\sin(\pi t)$ ist $x'(t)=\pi\cos(\pi t)$. Da $y(t)$ eine Stammfunktion von $t\mapsto e^{-t^2}$ ist, folgt $y'(t)=e^{-t^2}$. Mit $y(1)=42$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(f\big(x(t),y(t)\big)\Big)\Big|_{t=1} &= 2x(1)\,x'(1)+2y(1)\,y'(1)\\ &= 2\pi\cos(\pi)\sin(\pi)+84e^{-1} = \frac{84}{e}.\end{aligned}$$

(b) Gemäss Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_s^z e^{tz}\,dt = -\frac{\partial}{\partial s}\int_z^s e^{tz}\,dt = -e^{sz}.$$

Mit Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\cos x+\sin y}^z e^{tz}\,dt &= -e^{(\cos x+\sin y)z}\frac{\partial}{\partial x}(\cos x+\sin y) = e^{(\cos x+\sin y)z}\sin x,\\ \frac{\partial}{\partial y}\int_{\cos x+\sin y}^z e^{tz}\,dt &= -e^{(\cos x+\sin y)z}\frac{\partial}{\partial y}(\cos x+\sin y) = -e^{(\cos x+\sin y)z}\cos y.\end{aligned}$$

Wir werten bei $(x, y, z) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0)$ aus und erhalten

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{3}, 0\Big) = \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\Big(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{3}, 0\Big) = -\cos(\tfrac{\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2}.$$

Die partielle Ableitung nach z an der Stelle $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0)$ errechnen wir aus dem Differenzenquotienten. Zunächst gilt $\cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} =: a$. Für $h \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} f(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{3}, h) &= \int_a^h e^{th}\, dt = \Big[\tfrac{1}{h} e^{th}\Big]_a^h = \tfrac{1}{h}(e^{h^2} - e^{ah}), \\ f(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{3}, 0) &= \int_a^0 1\, dt = -a. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Exponentialreihe $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, h) - f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0)}{h} &= \frac{e^{h^2} - e^{ah} + ah}{h^2} \\ &= \frac{(1 + h^2) - (1 + ah + \frac{1}{2}a^2h^2) + ah + R[h]}{h^2} \\ &= \frac{h^2 - \frac{1}{2}a^2h^2 + R[h]}{h^2} \xrightarrow{h \to 0} 1 - \tfrac{1}{2}a^2 = \tfrac{5}{8}, \end{aligned}$$

denn alle Terme in $R[h]$ sind von mindestens dritter Ordnung $(h^3, h^4, \ldots)$. Also gilt $\frac{\partial f}{\partial z}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0) = \frac{5}{8}$. Insgesamt folgt

$$df(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{3}, 0) = \Big(1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{8}\Big).$$

6.4. Tangentialebene

(a) Die Punkte $(x, y, z) \in \mathcal{G}$ sind durch die Gleichung $z = f(x, y) = e^{-(x^2+y^2-2x+3y+2)}$ bestimmt. Die Schnittmengen von $\mathcal{G}$ mit den Ebenen $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\; y = 0\}$ beziehungsweise $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\; x = 0\}$ sind somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \cap E_1 &= \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\,;\; z = f(x, 0)\}, \\ \mathcal{G} \cap E_2 &= \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\; z = f(0, y)\}. \end{aligned}$$

und können parametrisiert werden durch $\gamma_1, \gamma_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma_1 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ f(t, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ e^{-t^2+2t-2} \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ f(0, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ e^{-t^2-3t-2} \end{pmatrix}.$$

(b) Die partiellen Ableitungen von $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2-2x+3y+2)}$ sind gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (-2x+2)\, f(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-2y-3)\, f(x,y).$$

Die Kurven γ_1, γ_2 schneiden sich bei $t = 0$ im Punkt $(0, 0, f(0,0)) = (0, 0, e^{-2})$. Die Tangentialvektoren der Kurven sind in diesem Punkt gegeben durch

$$\dot\gamma_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2} \end{pmatrix} =: v, \quad \dot\gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3e^{-2} \end{pmatrix} =: w.$$

(c) Die Tangentialebene E an $\mathcal{G}$ im Punkt $(0, 0, e^{-2}) \in \mathcal{G}$ wird durch die Vektoren v, w aus Teilaufgabe (b) aufgespannt. Eine mögliche Parametrisierung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to E$ ist

$$\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der Koordinatengleichung von E suchen wir einen Vektor senkrecht zu v und w, zum Beispiel $u = (-2e^{-2}, 3e^{-2}, 1)$. In der Tat gilt $u \cdot v = 0$ und $u \cdot w = 0$. Die Ebenengleichung ist somit von der Form

$$-2e^{-2}x + 3e^{-2}y + 1z = c.$$

Die Bedingung $(0, 0, e^{-2}) \in E$ impliziert $c = e^{-2}$ und es folgt

$$E = \{(x,y,z)\,;\; -2e^{-2}x + 3e^{-2}y + z = e^{-2}\}.$$

Die durch das Differential $df(0,0) = (2e^{-2}, -3e^{-2})$ gegebene lineare Approximation von f nahe $(0,0)$ ist gegeben durch

$$\ell(x,y) = f(0,0) + df(0,0) \cdot (x,y) = e^{-2} + 2e^{-2}x - 3e^{-2}y.$$

Wir sehen, dass die Tangentialebene E genau durch die Bedingung $z = \ell(x,y)$ gegeben ist und damit mit dem Graphen der linearen Näherung übereinstimmt.

(d) Die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0) ist parallel zur x-y-Ebene, falls beide Tangentialvektoren parallel zur x-y-Ebene sind, also falls $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ gilt. Mit $f(x,y) > 0$ erhalten wir aus (b) die Bedingungen $-2x+2 = 0$ und $-2y-3 = 0$. Folglich ist die Tangentialebene im Punkt

$$\left(1, -\tfrac{3}{2}, f(1, -\tfrac{3}{2})\right) = \left(1, -\tfrac{3}{2}, e^{\frac{5}{4}}\right) \in \mathcal{G}$$

parallel zur x-y-Ebene.