7.1. Differentialformen

(a) Das Differential von $f(x,y) = y$ ist $df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = dy$. Für alle $p_0 \in \mathbb{R}^2$ ist

$$df(p_0)\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} = dy\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} = -4.$$

(b) Das Differential von $f(x,y) = (x-2y)^3$ ist $df = 3(x-2y)^2\,dx - 6(x-2y)^2\,dy$.

$$df(6,2)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = (12\,dx - 24\,dy)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 0.$$

(c) Das Differential von $f(x,y) = \sin(2x)+\cos(3y)$ ist $df = 2\cos(2x)\,dx - 3\sin(3y)\,dy$.

$$df(\pi,\tfrac{\pi}{2})\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix} = (2\,dx + 3\,dy)\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix} = 2\cdot 6 - 3\cdot 7 = 12 - 21 = -9.$$

7.2. Gradient

(a) Es gilt $\nabla f(p_0) = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, denn

$$6 = df(p_0)\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\cdot 2 \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 3,$$

$$1 = df(p_0)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) - 3 \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = 4.$$

(b) Wir berechnen das Gradientenfeld der Funktion $f(x,y) = x^3\sin(y) + x$ und werten an der Stelle $(2,\pi) \in \mathbb{R}^2$ aus:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}3x^2\sin(y)+1\\ x^3\cos(y)\end{pmatrix}, \qquad \nabla f(2,\pi) = \begin{pmatrix}1\\-8\end{pmatrix}.$$

Da der Gradient die Richtung des maximalen Anstiegs ist, bewegt sich der Tautropfen von oben betrachtet in Richtung des negativen Gradienten $-\nabla f(2,\pi) = \left(\begin{smallmatrix}-1\\8\end{smallmatrix}\right)$.

Die Steigung des Graphen in Richtung $-\nabla f(2,\pi)$ entspricht der Richtungsableitung $D_v f(2,\pi)$ in Richtung des Einheitsvektors

$$v = -\frac{\nabla f(2,\pi)}{|\nabla f(2,\pi)|},$$

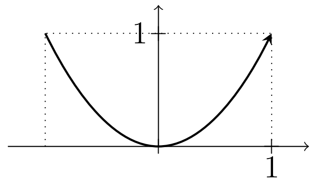
also

$$D_v f(2,\pi) = \nabla f(2,\pi)\cdot\left(-\frac{\nabla f(2,\pi)}{|\nabla f(2,\pi)|}\right) = -|\nabla f(2,\pi)| = -\sqrt{65}.$$

7.3. Wegintegrale

(a) Als Parametrisierung der Parabel wählen wir $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (t, t^2)$. Dann ist das Integral der 1-Form $\lambda = (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ entlang γ nach Definition

$$\begin{aligned}\int_\gamma \lambda &= \int_{-1}^{1} \lambda\big(\gamma(t)\big)\dot\gamma(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \Big((t+t^2)\,dx + (t-t^2)\,dy\Big)\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} 1(t+t^2) + 2t(t-t^2)\,dt = \int_{-1}^{1} -2t^3 + 3t^2 + t\,dt = 2.\end{aligned}$$



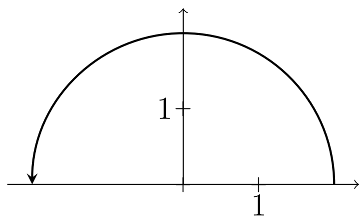
(b) $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ parametrisiert den gegebenen Halbkreis. Das Integral der 1-Form $\lambda = xy^2\,dy$ entlang γ beträgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma \lambda &= \int_0^\pi \lambda\big(\gamma(t)\big)\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^\pi \Big((2\cos t)(2\sin t)^2\,dy\Big)\begin{pmatrix}-2\sin t\\2\cos t\end{pmatrix}\,dt \\ &= \int_0^\pi (2\cos t)^2(2\sin t)^2\,dt = 2\int_0^\pi 1-\cos(4t)\,dt = 2\Big[t - \tfrac14\sin(4t)\Big]_0^\pi = 2\pi,\end{aligned}$$

wobei wir auf folgende Formeln zurückgreifen.

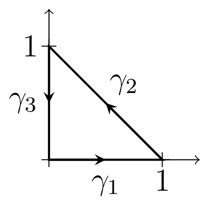
$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2(\sin\alpha)(\cos\alpha), \\ \cos(2\alpha) &= (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 \\ &= 1 - 2(\sin\alpha)^2,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad 8(\sin t)^2(\cos t)^2 = 2(\sin(2t))^2 = 1 - \cos(4t).$$



(c) Wir parametrisieren das gegebene Dreieck stückweise mit

$$\gamma_1\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad t\mapsto\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix} \qquad \gamma_2\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad t\mapsto\begin{pmatrix}1-t\\t\end{pmatrix} \qquad \gamma_3\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2\quad t\mapsto\begin{pmatrix}0\\1-t\end{pmatrix}$$



und integrieren die 1-Form $\lambda = (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$ entlang jedes Teilpfads:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\lambda &= \int_0^1 \Big(t^2\,dx + t^2\,dy\Big)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac13, \\ \int_{\gamma_2}\lambda &= \int_0^1 \Big(((1-t)^2+t^2)dx + ((1-t)^2-t^2)dy\Big)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 -2t^2\,dt = -\frac23, \\ \int_{\gamma_3}\lambda &= \int_0^1 \Big((1-t)^2dx - (1-t)^2dy\Big)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 (1-t)^2\,dt = \frac13,\end{aligned}$$

$$\int_\gamma\lambda = \int_{\gamma_1}\lambda + \int_{\gamma_2}\lambda + \int_{\gamma_3}\lambda = \frac13 - \frac23 + \frac13 = 0.$$

7.4. Vektorfelder

(a) Wir suchen zunächst ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 + 2yz \\ y^2 \end{pmatrix} = v(x,y,z).$$

Dazu müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \overset{!}{=} 2xy^3 \quad &\Rightarrow \quad f(x,y,z) = x^2y^3 + g(y,z) \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + \frac{\partial g}{\partial y} \overset{!}{=} 3x^2y^2 + 2yz \quad \Rightarrow \quad g(y,z) = y^2z + h(z) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + h'(z) \overset{!}{=} y^2. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $h(z)$ konstant ist. Somit ist $f(x,y,z) = x^2y^3 + y^2z$ ein Potential für v. Für das Integral entlang $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (t^3, t^2+t, t)$ erhalten wir

$$\int_\gamma v \cdot d\vec{s} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,2,1) - f(0,0,0) = 12.$$

(b) Das Vektorfeld

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y+z \\ x+z \end{pmatrix}$$

erlaubt kein $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = v$, denn aus der Bedingung $\frac{\partial f}{\partial x} = x + z$ folgt $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + zx + g(y,z)$. Dies widerspricht aber der Bedingung $x+y+z = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$, denn $g(y,z)$ darf nicht von x abhängen. Das Wegintegral entlang $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (t^3, t^2+t, t)$ berechnen wir nach Definition.

$$\begin{aligned} \int_\gamma v \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 v(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 + t \\ t^3 + t^2 + 2t \\ t^3 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (t^3+t)(3t^2+1)\, dt + \int_0^1 2t^4 + 3t^3 + 5t^2 + 2t\, dt \\ &= \Big[\tfrac{1}{2}(t^3+t)^2\Big]_0^1 + \Big[\tfrac{2}{5}t^5 + \tfrac{3}{4}t^4 + \tfrac{5}{3}t^3 + t^2\Big]_0^1 \\ &= 2 + \tfrac{2}{5} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{3} + 1 = \tfrac{349}{60}. \end{aligned}$$