8.1. Minima und Maxima Das Differential von $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ist

$$df(x,y) = \Big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big) = \Big(3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x\Big).$$

Ein Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist ein kritischer Punkt, falls $df(x,y) = (0,0)$ gilt. Es folgen die Bedingungen $x^2 = y$ und $y^2 = x$. Dies impliziert

$$y = x^2 = (y^2)^2 = y^4 \;\Leftrightarrow\; (y^3 - 1)y = 0 \;\Leftrightarrow\; y \in \{1, 0\}.$$

Für $y = 1$ folgt $x = 1$. Für $y = 0$ folgt $x = 0$. Somit sind $(1,1)$ und $(0,0)$ die kritischen Punkte von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zur Bestimmung des Typs berechnen wir die Hessematrix

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

An den kritischen Punkten ausgewertet erhalten wir

$$\mathrm{Hess}_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\det \mathrm{Hess}_f(1,1) = 27 > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(1,1) = 6 > 0$ ist $(1,1)$ eine lokale Minimalstelle. Wegen $\det \mathrm{Hess}_f(0,0) = -9 < 0$ ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

8.2. Minima und Maxima Das Differential von $f(x,y) = xy^2 - \cos(x)$ ist

$$df(x,y) = \Big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big) = \Big(y^2 + \sin(x), 2xy\Big).$$

Es gilt $df(x,y) = (0,0)$, falls $y^2 + \sin(x) = 0$ und $2xy = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt $x = 0$ oder $y = 0$. Für $x = 0$ folgt $y = 0$ aus der ersten Bedingung. Für $y = 0$ folgt $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Menge der kritischen Punkte von f ist also $\{(k\pi, 0)\,;\; k \in \mathbb{Z}\}$. Zur Bestimmung des Typs berechnen wir die Hessematrix

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

An einem kritischen Punkt $(k\pi, 0) \in \mathbb{R}^2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ausgewertet erhalten wir

$$\mathrm{Hess}_f(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} \cos(k\pi) & 0 \\ 0 & 2k\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2k\pi \end{pmatrix}.$$

Dies ist bereits eine Diagonalmatrix; ihre Eigenwerte (EW) stehen auf der Diagonalen. Dabei treten folgende Fälle auf:

$k > 0$	gerade	$\Rightarrow$ beide EW positiv	$\Rightarrow$ lokale Minimalstelle
$k > 0$	ungerade	$\Rightarrow$ ein negativer und ein positiver EW	$\Rightarrow$ Sattelpunkt
$k = 0$		$\Rightarrow$ ein EW ist Null	$\Rightarrow$ entarteter Punkt
$k < 0$	gerade	$\Rightarrow$ ein negativer und ein positiver EW	$\Rightarrow$ Sattelpunkt
$k < 0$	ungerade	$\Rightarrow$ beide EW negativ	$\Rightarrow$ lokale Maximalstelle

8.3. Taylor

(a) Die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y) = e^x \sin(y)$ sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \sin(y), \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \sin(y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x \cos(y), \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x \cos(y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin(y).$$

Wir werten im Punkt $(x_0,y_0) = (0,\frac{\pi}{2}) \in \mathbb{R}^2$ aus und erhalten $f(0,\frac{\pi}{2}) = 1$ sowie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\tfrac{\pi}{2}) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(0,\tfrac{\pi}{2}) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,\tfrac{\pi}{2}) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(0,\tfrac{\pi}{2}) = -1.$$

Die Taylorpolynome ersten und zweiten Grades lauten also

$$T_1 f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) = 1 + x,$$

$$\begin{aligned} T_2 f(x,y) &= T_1 f(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) \\ &= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}(y-\tfrac{\pi}{2})^2. \end{aligned}$$

Für den Wert an der Stelle $(0,\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4})$ erhalten wir die Näherungen

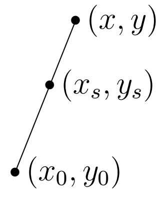
$$T_1 f(0,\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{4}) = 1, \qquad T_2 f(0,\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{4}) = 1 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{31}{32} = 0.96875.$$

Die Näherung durch T_2 ist sehr gut, denn der tatsächliche Wert ist

$$f(0,\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{4}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{4}) \approx 0.96891.$$

(b) Es gilt $f(x,y) = T_1 f(x,y) + r_1 f(x,y)$ mit

$$\begin{aligned} r_1 f(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x_s,y_s)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x_s,y_s)\cdot(y-y_0)^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_s,y_s)\cdot(x-x_0)(y-y_0) \end{aligned}$$



für ein $s \in [0,1]$ und $(x_s,y_s) := \big(x_0 + s(x-x_0), y_0 + s(y-y_0)\big)$. In unserem Fall gilt $|f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)| \leq e^x$ wegen $|\sin x| \leq 1$ und $|\cos x| \leq 1$. Für $(x_0,y_0) = (0,\frac{\pi}{2})$ und $(x,y) \in B_{\frac{1}{4}}(x_0,y_0)$ folgt $|x-x_0| \leq \frac{1}{4}$ und $|y-y_0| \leq \frac{1}{4}$ sowie $x_0 + s(x-x_0) \leq \frac{1}{4}$, also

$$|r_1(x,y)| \leq 4\cdot\left(\tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}\cdot(\tfrac{1}{4})^2\right) = \tfrac{1}{8}e^{\frac{1}{4}} \approx 0.1605.$$