9.1. Harmonische Funktion Falls $n = 2$ ist $f(x_1, x_2) = \log(x_1^2 + x_2^2)$ und es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}\Big) = \frac{2(x_1^2 + x_2^2) - (2x_1)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{-2x_1^2 + 2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2}\Big) = \frac{2(x_1^2 + x_2^2) - (2x_2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_1^2 - 2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

an jeder Stelle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Daraus folgt die Gleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$.

Falls $n > 2$ ist $f(x) = |x|^{2-n} = \Big(x_1^2 + \ldots + x_2^2\Big)^{1-\frac{n}{2}}$ und für $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{(1-\frac{n}{2})2x_k}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{n}{2}}}\right) = (2-n)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_k}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{n}{2}}}\right) \\
&= (2-n)\left(\frac{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{n}{2}} - x_k\frac{n}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}2x_k}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^n}\right) \\
&= (2-n)\Big(|x|^{-n} - n|x|^{-n-2}x_k^2\Big), \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} &= (2-n)\Big(n|x|^{-n} - n|x|^{-n-2}\sum_{k=1}^n x_k^2\Big) = 0.
\end{aligned}$$

9.2. Polarkoordinaten In Polarkoordinaten ist $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ gegeben durch die Funktion $h\colon [0,\infty[\times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ mit

$$h(r,\varphi) = (f \circ P)(r,\varphi) = \Big(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi, 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\Big).$$

Für die Jacobimatrix gilt $dh(r,\varphi) = df\Big(P(r,\varphi)\Big)dP(r,\varphi)$ gemäss Kettenregel, wobei

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad dP(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
dh(r,\varphi) &= \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ 2r\sin\varphi & 2r\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2r\cos^2\varphi - 2r\sin^2\varphi & -4r^2\sin\varphi\cos\varphi \\ 4r\sin\varphi\cos\varphi & -2r^2\sin^2\varphi + 2r^2\cos^2\varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Durch direkte Rechnung erhalten wir ebenfalls

$$dh(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\cos^2\varphi - 2r\sin^2\varphi & -4r^2\sin\varphi\cos\varphi \\ 4r\sin\varphi\cos\varphi & -2r^2\sin^2\varphi + 2r^2\cos^2\varphi \end{pmatrix}.$$

9.3. Kugelkoordinaten Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\Phi(r,\varphi,\theta) \mapsto \big(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta\big).$$

(a) Die Jacobi-Matrix von Φ und deren Determinante sind gegeben durch

$$d\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \Phi^1_r & \Phi^1_\varphi & \Phi^1_\theta \\ \Phi^2_r & \Phi^2_\varphi & \Phi^2_\theta \\ \Phi^3_r & \Phi^3_\varphi & \Phi^3_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\det\big(d\Phi(r,\varphi,\theta)\big) = \big(r^2\sin\theta\cos\theta\big)\sin\theta + \big(r\cos^2\theta\big)r\cos\theta = r^2\cos\theta.$$

(b) Es gilt $\Phi(0,\varphi,\theta) = (0,0,0)$ für alle φ,θ. Die Abbildung ist also nicht injektiv mit $r=0$ im Definitionsbereich. Ebenso gilt für alle φ und $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

$$\Phi(r,\varphi,\tfrac{\pi}{2}) = (0,0,r), \qquad \Phi(r,\varphi,-\tfrac{\pi}{2}) = (0,0,-r). \tag{†}$$

Auf dem restlichen Definitionsgebiet, also für $(r,\varphi,\theta) \in \,]0,\infty] \times [0,2\pi[\, \times \,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\, =: \Omega$ zeigen wir, dass Φ injektiv ist. Aus (a) folgt $\det d\Phi(r,\varphi,\theta) = r^2\cos\theta \neq 0$ für alle $(r,\varphi,\theta) \in \Omega$, das heisst, die Jacobi-Matrix $\det d(r,\varphi,\theta)$ ist invertierbar. Gemäss Umkehrsatz ist dann auch Φ *lokal*, also in einer Umgebung jedes $(r,\varphi,\theta) \in \Omega$ invertierbar. Um zu zeigen, dass Φ auch *global*, also auf ganz Ω injektiv ist, berechnen wir die Umkehrabbildung, das heisst, wir lösen die Gleichungen $(x,y,z) = \Phi(r,\varphi,\theta)$ nach (r,φ,θ) auf.

Zunächst gilt $x^2+y^2+z^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$. Da $r>0$ gesucht ist, folgt

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Aus $z = r\sin\theta$ und der Gleichung für r folgt

$$\theta = \arcsin\Big(\frac{z}{r}\Big) = \arcsin\Big(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big).$$

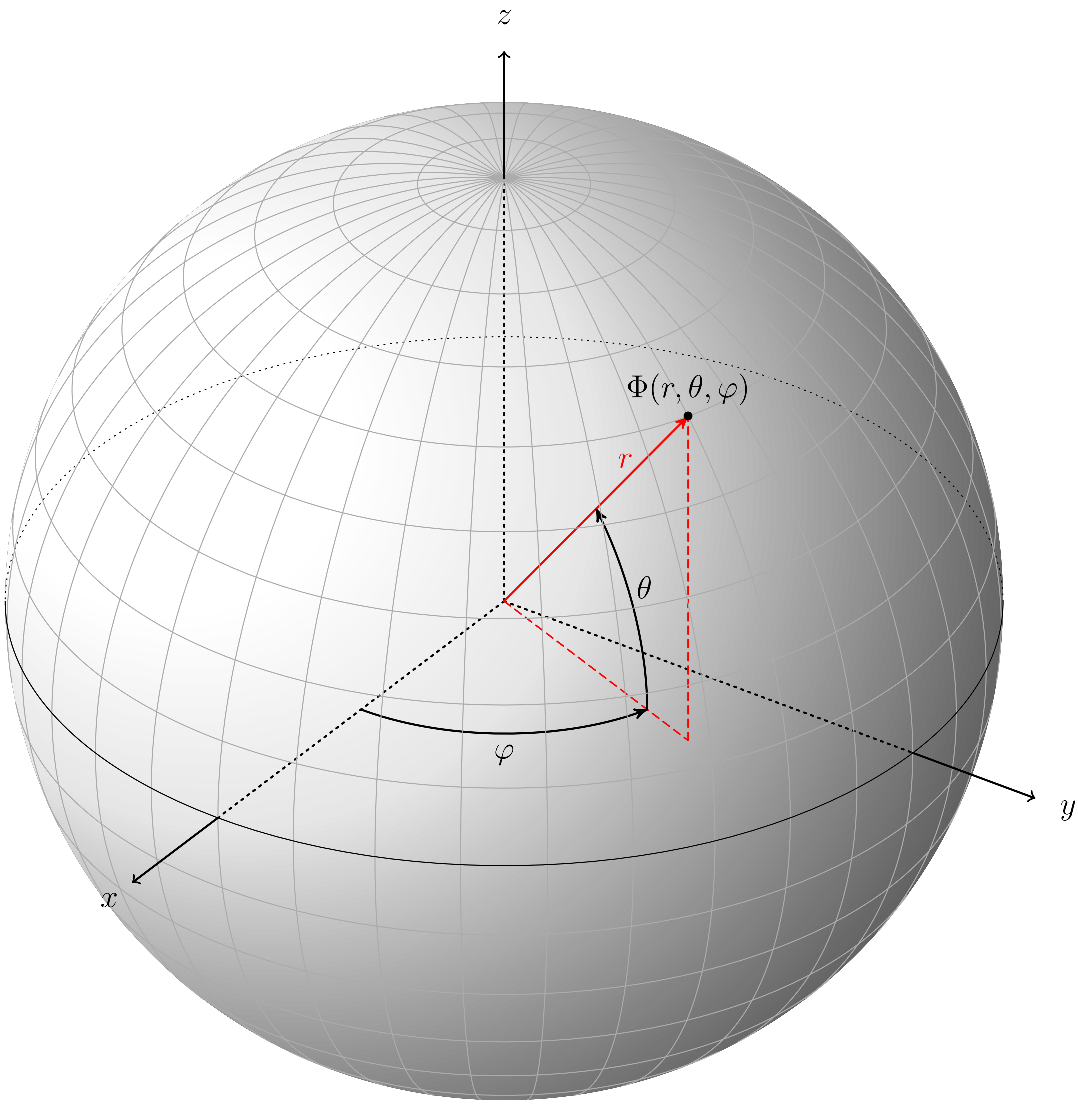
Schliesslich ist $(x,y) = (r\cos\theta)(\cos\varphi,\sin\varphi)$, das heisst, $\varphi = \arg(x,y)$ ist das Argument (Polarwinkel) des Punkts $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\varphi = \arg(x,y) := \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{falls } x>0,\ y>0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x=0,\ y>0, \\ \arctan(\frac{y}{x})+\pi & \text{falls } x<0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x=0,\ y<0, \\ \arctan(\frac{y}{x})+2\pi & \text{falls } x>0,\ y<0. \end{cases}$$

Wegen (†) ist die Umkehrabbildung nicht auf der z-Achse definiert. Insgesamt gilt

$$\Phi^{-1}\colon \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\ (x,y)\neq(0,0)\}\to\Omega=\,]0,\infty]\times[0,2\pi[\,\times\,]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[$$
$$\Phi^{-1}(x,y,z)=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \arg(x,y),\ \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right).$$

(c) Folgende Illustration zeigt, wie man Kugelkoordinaten zu kartesischen Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ transformiert. Wie man sieht, ist der Winkel φ für Punkte auf der z-Achse nicht eindeutig.



9.4. Störungstheorie Wir definieren die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{xy}\sin(x^2-y^2+x) \\ e^{x^2+y}\cos(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $f(0,0) = (0,1)$. Wir wollen zeigen, dass f in einer Umgebung dieser Werte invertierbar ist. Zur Anwendung des Umkehrsatzes berechnen wir die Einträge der Jacobi-Matrix.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) &= y\,e^{xy}\sin(x^2-y^2+x) + (2x+1)e^{xy}\cos(x^2-y^2+x), \\
\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) &= x\,e^{xy}\sin(x^2-y^2+x) - 2y\,e^{xy}\cos(x^2-y^2+x), \\
\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &= 2x\,e^{x^2+y}\cos(x^2+y^2) - 2x\,e^{x^2+y}\sin(x^2+y^2), \\
\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) &= e^{x^2+y}\cos(x^2+y^2) - 2y\,e^{x^2+y}\sin(x^2+y^2), \\
\Rightarrow\ df(0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist $df(0,0)$ eine invertierbare Matrix. Aus dem Umkehrsatz folgt dann, dass Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,1)$ existieren, sodass $f\colon U \to V$ umkehrbar mit stetiger Inversen $f^{-1}\colon V \to U$ ist.

Als Umgebung des Punktes $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ enthält die Menge V einen kleinen Ball um diesen Punkt: Sei $\varepsilon > 0$ sodass $B_\varepsilon(0,1) \subset V$. Dann sind alle $(\xi, 1+\eta) \in \mathbb{R}^2$ mit $\xi^2 + \eta^2 < \varepsilon^2$ Elemente von V. Ferner löst

$$\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big) := f^{-1}(\xi, 1+\eta)$$

das gestörte Gleichungssystem. Stetigkeit der Abbildung f^{-1} bedeutet, dass $x(\xi,\eta)$ und $y(\xi,\eta)$ stetig von ξ und η abhängen.