11.1. Extrema im Kreis Falls (x_0, y_0) ein regulärer Punkt von g ist und falls f in diesem Punkt ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ hat, so existiert ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass $df(x_0, y_0) + \lambda\, dg(x_0, y_0) = 0$. Weitere Kandidaten für Extrema sind Punkte, in denen g nicht regulär ist. Wir betrachten

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

(a) Punkte des Einheitskreises sind durch die Nebenbedingung $g(x, y) := x^2 + y^2 = 1$ charakterisiert. An nicht-regulären Punkten von g ist der Rang von $dg(x, y) = (2x, 2y)$ strikt kleiner als 1, das heisst $(x, y) = (0, 0)$. Dieser Punkt erfüllt jedoch nicht die Nebenbedingung. Für reguläre Punkte von g erhalten wir die Lagrange-Bedingung $0 = df(x, y) + \lambda\, dg(x, y) = (2x - 1, 4y) + \lambda(2x, 2y)$. Zusammen mit $g(x, y) = 1$ folgt

$$\begin{cases} 2x - 1 = 2\lambda x \\ 4y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $y = 0$ oder $\lambda = 2$. Wenn $y = 0$, dann ist $x^2 = 1$. Wenn $\lambda = 2$, dann folgt $2x - 1 = 4x \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2}$ aus der ersten Gleichung und $\frac{1}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4}$ aus der dritten Gleichung. Somit sind die folgenden vier Punkte Kandidaten für Extrema von f unter der Nebenbedingung:

$$\begin{array}{cccc} p_1 = (1, 0), & p_2 = (-1, 0), & p_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), & p_4 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \\ f(p_1) = 0, & f(p_2) = 2, & f(p_3) = \frac{9}{4}, & f(p_4) = \frac{9}{4}. \end{array}$$

Auf dem Einheitskreis nimmt f also sein Minimum 0 im Punkt $p_1 = (1, 0)$ und sein Maximum $\frac{9}{2}$ in den Punkten $p_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ und $p_4 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ an.

(b) Die Kandidaten für Extrema von f auf dem Rand der Einheitskreisscheibe haben wir schon in (a) bestimmt. Für ein Extremum im Inneren $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x^2 + y^2 < 1\}$ ist $df(x, y) = (2x - 1, 4y) = (0, 0)$ eine notwendige Bedingung, das heisst, $p_5 = (\frac{1}{2}, 0)$ ist ein weiterer Kandidat. Mit Wert $f(p_5) = -\frac{1}{4} < 0 = f(p_1)$ ist p_5 die globale Minimalstelle von f auf der Einheitskreisscheibe. Das Maximum bleibt wie in (a).

11.2. Figur Die Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Also nimmt die stetige Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8x - 6y$ auf B ein Maximum und ein Minimum an. Kandidaten für diese Extrema sind

(i) kritische Punkte von f im Inneren des Gebiets,

(ii) kritische Punkte der Einschränkung von f auf die Teilstücke des Randes,

(iii) Die Eckpunkte $p_1 = (-10, 0)$, $p_2 = (0, 5)$, $p_3 = (0, -10)$ des Gebiets.

(i) Wegen $df(x,y) = (2x-8, 2y-6) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (4,3)$ hat f nur einen kritischen Punkt $p_4 = (4,3)$ im $\mathbb{R}^2$. Dieser ist auch Element von B.

(ii) Extrema von f auf den Randstücken von B können entweder wie in Aufgabe 11.1 mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren oder wie hier direkt durch Parametrisierung der Randkurven gefunden werden. Wir wählen folgende Parametrisierungen. Anders als bei Wegintegralen spielt die Richtung dabei keine Rolle.

$$\gamma_1\colon\ ]-10,0[\ \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \tfrac{1}{2}t+5) \qquad \gamma_2\colon\ ]-10,5[\ \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (0,t) \qquad \gamma_3\colon\ ]-\tfrac{\pi}{2},\pi[\ \to \mathbb{R}^2. \quad t \mapsto 10(\cos t, \sin t)$$

Entlang des ersten Randstücks gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= f(\gamma_1(t)) = t^2 + (\tfrac{1}{2}t+5)^2 - 8t - 6(\tfrac{1}{2}t+5) = \tfrac{5}{4}t^2 - 6t - 5,\\
\varphi_1'(t) &= \tfrac{5}{2}t - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \tfrac{12}{5} \notin\ ]-10,0[\,.
\end{aligned}$$

Da $t = \frac{12}{5}$ nicht im Definitionsbereich von γ_1 liegt, finden wir auf diesem Randstück keine Kandidaten für Extrema. Entlang des zweiten Randstücks gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_2(t) &= f(\gamma_2(t)) = t^2 - 6t,\\
\varphi_2'(t) &= 2t - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 3 \in\ ]-10,5[\,.
\end{aligned}$$

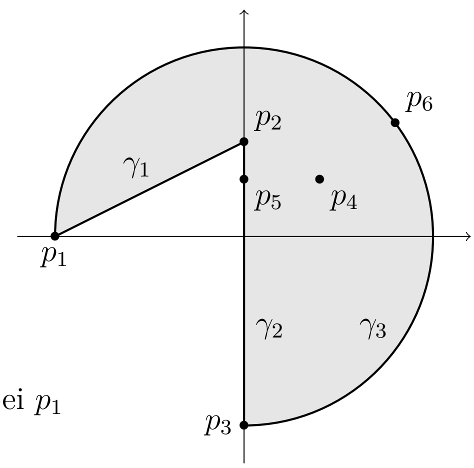
Der Punkt $p_5 = \gamma_2(3) = (0,3)$ ist also ein weiterer Kandidat. Auf dem Kreisrand gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_3(t) &= f(\gamma_3(t)) = 100 - 80\cos(t) - 60\sin(t),\\
\varphi_3'(t) &= 80\sin(t) - 60\cos(t) = 8y(t) - 6x(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \tfrac{4}{3}y.
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Bedingung $x^2 + y^2 = 100$ erhalten wir $\frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100$, also $y^2 = 36$. Für $y = 6$ ist $x = 8$. Für $y = -6$ ist $x = -8$. Der Punkt $(-8,-6)$ liegt jedoch nicht auf dem dritten Randstück, daher verbleibt $p_7 = (8,6)$ als letzter Kandidat.

(iii) Zusammen mit den Eckpunkten des Randes haben wir folgende Kandidaten für Extrema von f auf der Figur B.

$$\begin{aligned}
p_1 &= (-10,0), & f(p_1) &= 180,\\
p_2 &= (0,5), & f(p_2) &= -5,\\
p_3 &= (0,-10), & f(p_3) &= 160,\\
p_4 &= (4,3), & f(p_4) &= -25,\\
p_5 &= (0,3), & f(p_5) &= -9,\\
p_6 &= (8,6), & f(p_6) &= 0.
\end{aligned}$$



Somit nimmt f auf B sein Maximum 180 bei p_1 und sein Minimum -25 bei p_4 an.

11.3. Abstand vom Ellipsoid Wir minimieren die Funktion des *quadrierten* Abstands eines Punktes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ von $p = (5, 0, 5) \in \mathbb{R}^3$ unter der Nebenbedingung, dass (x, y, z) auf dem Ellipsoid liegt. Das führt zu den Funktionen

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x-5)^2 + y^2 + (z-5)^2, \\ g(x, y, z) &= x^2 + 4y^2 + z^2 = 4. \end{aligned}$$

Nur der Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ist nicht-regulär für g, erfüllt aber nicht $g(x, y, z) = 4$. Mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren erhalten wir die Bedingung

$$0 = df(x, y, z) + \lambda\, dg(x, y, z) = \Big(2(x-5), 2y, 2(z-5)\Big) + \lambda\Big(2x, 8y, 2z\Big)$$

und damit das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x - 10 = 2\lambda x \\ 2y = 8\lambda y \\ 2z - 10 = 2\lambda z \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $y = 0$ oder $\lambda = \frac{1}{4}$. Falls $\lambda = \frac{1}{4}$, dann folgt $x = \frac{20}{3} = z$ aus der ersten und dritten Gleichung. Dadurch wird die vierte Gleichung aber unlösbar.

Also gilt $y = 0$. Die erste und dritte Gleichung implizieren zusammen wieder $x = z$. Eingesetzt in die letzte Gleichung folgt $2x^2 = 4$. Wir erhalten demnach die Kandidaten $p_1 = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ und $p_2 = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ mit Funktionswerten $f(p_1) = 2(\sqrt{2} - 5)^2$ und $f(p_2) = 2(\sqrt{2} + 5)^2$. Die Funktion f misst den Abstand zu p im Quadrat. Der (minimale) Abstand von p zum Ellipsoid beträgt somit

$$d = \sqrt{f(p_1)} = \sqrt{2}(5 - \sqrt{2}) = 5\sqrt{2} - 2.$$

11.4. Lagrange-Multiplikatoren Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}, & g\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto x^3 + y^3 + z^3 & (x, y, z) &\mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und suchen Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = (0, 0)$. Kandidaten sind zunächst nicht-reguläre Punkte von g, welche die Nebenbedingung erfüllen. Punkte der Form $(x, y, z) = (0, 0, z)$ widersprechen der Bedingung $2x^2 + y^2 - 1 = 0$ und können daher bereits ausgeschlossen werden. Das heisst, die Zeilen von

$$dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

sind (unter der Nebenbedingung) linear abhängig, falls $t \neq 0$ existiert mit

$$t \cdot (2x, 2y, 2z) = (4x, 2y, 0).$$

Es folgt $x = 0 = z$. Aus der Nebenbedingung $g(0, y, 0) = (0, 0)$ folgt $y^2 = 1$. Die nichtregulären Punkte von g in $g^{-1}(\{(0, 0)\})$ sind also $p_1 = (0, 1, 0)$ und $p_2 = (0, -1, 0)$. Für reguläre Punkte von g formulieren wir die Lagrange-Bedingung

$$0 = df(x, y, z) + (\lambda, \mu) \cdot dg(x, y, z)$$

mit Lagrange-Multiplikatoren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Da $df(x, y, z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$ erhalten wir zusammen mit den Nebenbedingungen folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad & 3x^2 &= 2\lambda x + 4\mu x \\
&(2) \qquad & 3y^2 &= 2\lambda y + 2\mu y \\
&(3) \qquad & 3z^2 &= 2\lambda z \\
&(4) \qquad & x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\
&(5) \qquad & 2x^2 + y^2 &= 1
\end{aligned}$$

Die Differenz der Gleichungen (4) und (5) zeigt zunächst $x^2 = z^2$. Aus (3) folgt $z = 0$ oder $\lambda = \frac{3}{2}z$. Falls $z = 0$, so ist $x = 0$ und $y = \pm 1$. Diese Punkte sind bereits als p_1 und p_2 gelistet. Es verbleibt also $\lambda = \frac{3}{2}z \neq 0$. Wegen $x^2 = z^2$ unterscheiden wir:

Fall 1. $x = z = \frac{2}{3}\lambda \neq 0$. Wir teilen Gleichung (1) durch $x = \frac{2}{3}\lambda \neq 0$ und erhalten $2\lambda = 2\lambda + 4\mu$, also $\mu = 0$. Gleichung (2) wird zu $3y^2 = 2\lambda y$ und impliziert entweder

$$\begin{aligned}
&y = 0 & &\overset{(5)}{\Rightarrow}\ 2x^2 = 1 \ \Rightarrow\ x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}} = z, \\
\text{oder}\ \ &y = \tfrac{3}{2}\lambda = x = z & &\overset{(4)}{\Rightarrow}\ 3x^2 = 1 \ \Rightarrow\ x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}} = y = z.
\end{aligned}$$

Fall 2. $-x = z = \frac{2}{3}\lambda \neq 0$. Jetzt folgt $-2\lambda = 2\lambda + 4\mu$ aus Gleichung (1), also $\mu = -\lambda$. Mit Gleichung (2) folgt $y = 0$ und mit (5) folgt $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Insgesamt gibt es folgende Kandidaten für Extrema von f unter der Nebenbedingung:

$$\begin{aligned}
p_1 &= (0, 1, 0) & f(p_1) &= 1, & p_5 &= (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}) & f(p_5) &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \\
p_2 &= (0, -1, 0) & f(p_2) &= -1, & p_6 &= (\tfrac{-1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}) & f(p_6) &= -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \\
p_3 &= (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) & f(p_3) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}, & p_7 &= (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}) & f(p_7) &= 0, \\
p_4 &= (\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}) & f(p_4) &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, & p_8 &= (\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) & f(p_8) &= 0.
\end{aligned}$$

Das Maximum von f auf $g^{-1}(\{(0, 0)\})$ ist 1 und wird im Punkt $(0, 1, 0)$ angenommen. Das Minimum von f auf $g^{-1}(\{(0, 0)\})$ ist -1 und wird bei $(0, -1, 0)$ angenommen.

11.5. [aus dem 1. Vordiplom, Frühjahr 1997] Wir betrachten

$$\begin{aligned} F(x,y) &= e^y + y + \tfrac{1}{2}x^2 - x - \tfrac{1}{2}, \\ dF(x,y) &= (x-1, e^y+1). \end{aligned}$$

(a) Insbesondere gilt $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^y + 1 \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass die Lösungsmenge der Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung jeder gegebenen Lösung (x_0, y_0) der Graph einer Funktion $y = y(x)$ ist. Die Lösungsmenge ist wegen $F(1,0) = 0$ nicht leer.

(b) Aus der Formel für die Ableitung einer impliziten Funktion folgt

$$y'(x) = -\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x)\big)\Big)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}\big(x, y(x)\big) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial F}{\partial x}\big(x, y(x)\big) = 0.$$

Da $\frac{\partial F}{\partial x} = x - 1$ hier nicht von y abhängt, können wir obige Gleichung lösen ohne $y(x)$ zu kennen und erhalten $x = 1$ als kritischen Punkt für y. Wegen $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ folgt $y'(x) > 0$ für $x < 1$ und $y'(x) < 0$ für $x > 1$. Damit ist $y(x)$ für $x < 1$ monoton wachsend und für $x > 1$ monoton fallend, das heisst, $x = 1$ ist eine Maximalstelle.