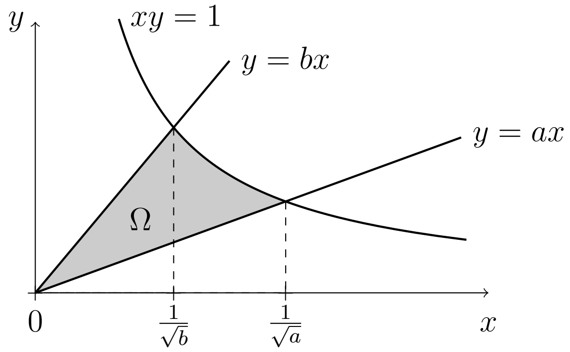
12.1. Gebiet Zunächst bestimmen wir die Schnittpunkte der Kurven für $b > a > 0$.

$$xy = 1 \wedge y = ax \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

$$xy = 1 \wedge y = bx \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

$$x = bx \wedge x = ax \;\Rightarrow\; x = 0.$$



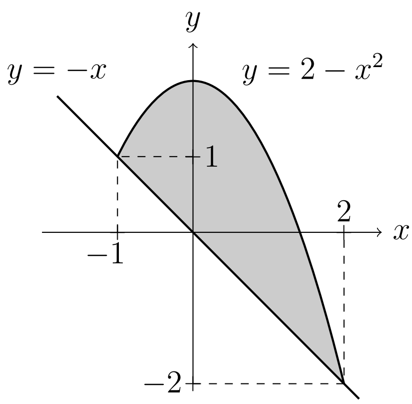
Somit ist

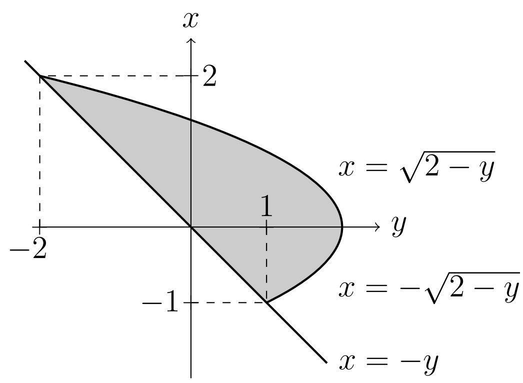
$$\begin{aligned}
\int_\Omega xy\,d\mu &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\int_{ax}^{bx} xy\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\int_{ax}^{\frac{1}{x}} xy\,dy\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\Big(x(bx)^2 - x(ax)^2\Big)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\Big(x\big(\tfrac{1}{x}\big)^2 - x(ax)^2\Big)\,dx \\
&= \frac{b^2}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{b}}} x^3\,dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\frac{1}{x}\,dx - \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} x^3\,dx \\
&= \frac{b^2}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{b}}} + \frac{1}{2}\Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} - \frac{a^2}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{1}{2}\log\sqrt{\frac{b}{a}}.
\end{aligned}$$

12.2. Iterierte Integrale Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Das Integrationsgebiet wird durch die Parabel $y = 2 - x^2$ und die Gerade $y = -x$ begrenzt, die sich in den Punkten $(-1, 1)$ und $(2, -2)$ schneiden. Auf dem linken Zweig der Parabel gilt $x = -\sqrt{2-y}$, auf dem rechten Zweig gilt $x = \sqrt{2-y}$. Wir teilen das Gebiet in zwei Teile auf und erhalten

$$\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-2}^{1}\int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx\,dy.$$



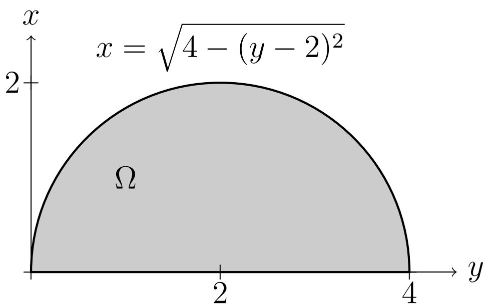


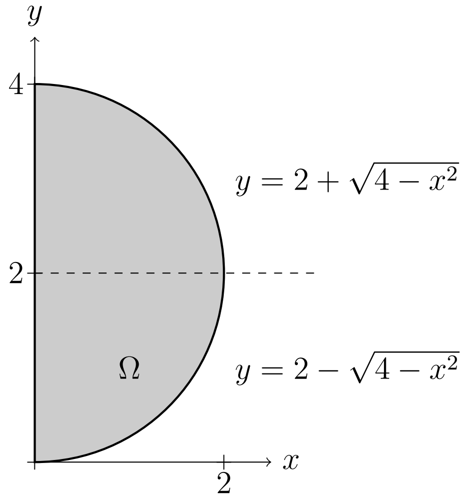
(b) Der Kreis hat die Gleichung $x^2 + (y-2)^2 = 2^2 = 4$. Damit ist der Halbkreis gegeben durch die Gleichung $x = \sqrt{4-(y-2)^2}$ und es gilt

$$\int_\Omega f(x,y)\,d\mu = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-(y-2)^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Der untere Viertelkreis ist bestimmt durch $y - 2 = -\sqrt{4-x^2}$, der obere durch $y - 2 = \sqrt{4-x^2}$. Also ist

$$\int_\Omega f(x,y)\,d\mu = \int_0^2 \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$

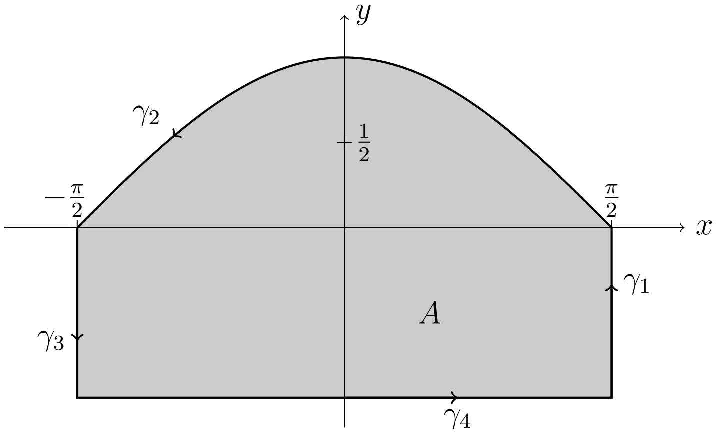




12.3. Satz von Green

(a) Wir parametrisieren die Randstücke des Gebiets A, sodass A zur Linken liegt.

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &\colon [-1,0] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_1 &\colon t \mapsto (\tfrac{\pi}{2}, t), & \dot\gamma_1(t) &= (0,1),\\
\gamma_2 &\colon [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_2 &\colon t \mapsto (-t, \cos t), & \dot\gamma_2(t) &= (-1, -\sin t),\\
\gamma_3 &\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_3 &\colon t \mapsto (-\tfrac{\pi}{2}, -t), & \dot\gamma_3(t) &= (0,-1),\\
\gamma_4 &\colon [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_4 &\colon t \mapsto (t, -1). & \dot\gamma_4(t) &= (1,0),
\end{aligned}$$



Das Integral der 1-Form $\lambda = x^2\,dx + y^2\,dy$ über ∂A lautet somit

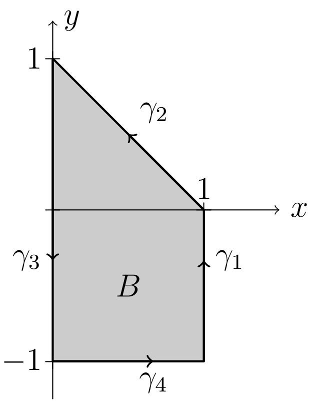
$$\begin{aligned}\int_{\partial A}\lambda &= \int_{\gamma_1}\lambda + \int_{\gamma_2}\lambda + \int_{\gamma_3}\lambda + \int_{\gamma_4}\lambda\\ &= \int_{-1}^{0} t^2\,dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2(-1) + (\cos^2 t)(-\sin t)\,dt + \int_0^1 t^2(-1)\,dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,dt\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t)(-\sin t)\,dt = \Big[\tfrac{1}{3}\cos^3 t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Green angewendet auf $g(x,y) = x^2$ und $h(x,y) = y^2$ gilt ebenfalls

$$\int_{\partial A}\lambda = \int_{\partial A}\Big(g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy\Big) = \int_A\Big(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\Big)\,d\mu = \int_A\Big(0-0\Big)\,d\mu = 0.$$

(b) Wir parametrisieren die Randstücke des Gebiets B, sodass B zur Linken liegt.

$$\begin{aligned}\gamma_1\colon [-1,0] &\mapsto \mathbb{R}^2, & \gamma_1\colon t &\mapsto (1,t), & \dot\gamma_1(t) &= (0,1),\\ \gamma_2\colon [0,1] &\mapsto \mathbb{R}^2, & \gamma_2\colon t &\mapsto (1-t,t), & \dot\gamma_2(t) &= (-1,1),\\ \gamma_3\colon [-1,1] &\mapsto \mathbb{R}^2, & \gamma_3\colon t &\mapsto (0,-t), & \dot\gamma_3(t) &= (0,-1),\\ \gamma_4\colon [0,1] &\mapsto \mathbb{R}^2, & \gamma_4\colon t &\mapsto (t,-1), & \dot\gamma_4(t) &= (1,0).\end{aligned}$$



Das Integral von $\lambda = xy\,dx + e^x\,dy$ über ∂B lautet somit

$$\begin{aligned}\int_{\partial B}\lambda &= \int_{\gamma_1}\lambda + \int_{\gamma_2}\lambda + \int_{\gamma_3}\lambda + \int_{\gamma_4}\lambda\\ &= \int_{-1}^{0} e^1\,dt + \int_0^1 (1-t)t(-1) + e^{1-t}\,dt + \int_{-1}^{1} e^0(-1)\,dt + \int_0^1 -t\,dt\\ &= e - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (1 - e^1) - 2 - \tfrac{1}{2} = 2e - \tfrac{11}{3}.\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Green angewendet auf $g(x,y) = xy$ und $h(x,y) = e^x$ gilt ebenfalls

$$\begin{aligned}\int_{\partial B}\lambda &= \int_B\Big(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\Big)\,d\mu = \int_B e^x - x\,d\mu = \int_0^1\int_{-1}^{1-x} e^x - x\,dy\,dx\\ &= \int_0^1 (2-x)(e^x - x)\,dx = \Big[(2-x)(e^x - \tfrac{1}{2}x^2)\Big]_0^1 + \int_0^1 (e^x - \tfrac{1}{2}x^2)\,dx\\ &= (e - \tfrac{1}{2}) - 2 + (e-1) - \tfrac{1}{6} = 2e - \tfrac{11}{3}.\end{aligned}$$

12.4. Flächeninhalt In Polarkoordinaten $(x, y) = P(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ wird die Gleichung $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2+y^2} + x$ zu $r^2 = r + r\cos\varphi$. Für Punkte auf der Kurve gilt somit entweder $r = 0$ oder $r = 1 + \cos\varphi$. Auch der zweite Ausdruck verschwindet für $\varphi = \pi$, das heisst, die Kurve kann in Polarkoordinaten parametrisiert werden durch

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}\colon\ [0, 2\pi[&\to [0, \infty[\times [0, 2\pi[\\ \varphi &\mapsto (r(\varphi), \varphi) = (1 + \cos\varphi, \varphi).\end{aligned}$$

Eine Parametrisierung in kartesischen Koordinaten erhalten wir durch $\gamma = P \circ \tilde{\gamma}$, also

$$\begin{aligned}\gamma\colon\ [0, 2\pi[&\to \mathbb{R}^2\\ \varphi &\mapsto \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi + \cos^2\varphi \\ \sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass die Kurve im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Wir wenden den Satz von Green auf das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rot}(v) = 0 - \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 1$$

im von γ eingeschlossenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ an, um dessen Flächeninhalt wie folgt zu bestimmen.

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \int_\Omega 1\,d\mu = \int_\Omega \operatorname{rot}(v)\,d\mu = \int_{\partial\Omega} v \cdot d\vec{s}\\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -(\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{pmatrix} d\varphi\\ &= \int_0^{2\pi} (\sin\varphi)^2(1 + \cos\varphi)(1 + 2\cos\varphi)\,d\varphi\\ &= \int_0^{2\pi} (\sin\varphi)^2\,d\varphi + \int_0^{2\pi} 3(\sin\varphi)^2\cos\varphi\,d\varphi + \int_0^{2\pi} 2(\sin\varphi)^2(\cos\varphi)^2\,d\varphi\\ &= \Big[\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\Big]_0^{2\pi} + \Big[\sin^3\varphi\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\Big[1 - \tfrac{1}{4}\sin(4\varphi)\Big]_0^{2\pi}\\ &= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

(Vergleiche Aufgabe 7.3 (b) zur Herleitung der Stammfunktion des letzten Integrals.)