13.1. Substitution Wie in der Lösung zu Aufgabe 12.4 gezeigt, ist der Rand des Gebiets Ω in Polarkoordinaten durch die Bedingung $r = 1 + \cos\varphi$ bestimmt. Somit ist das Gebiet in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\{(r, \varphi) \in [0, \infty[\times [0, 2\pi[\ ;\ 0 \leq r \leq 1 + \cos\varphi\}.$$

Der Flächeninhalt von Ω kann somit wie folgt durch Transformation nach Polarkoordinaten berechnet werden.

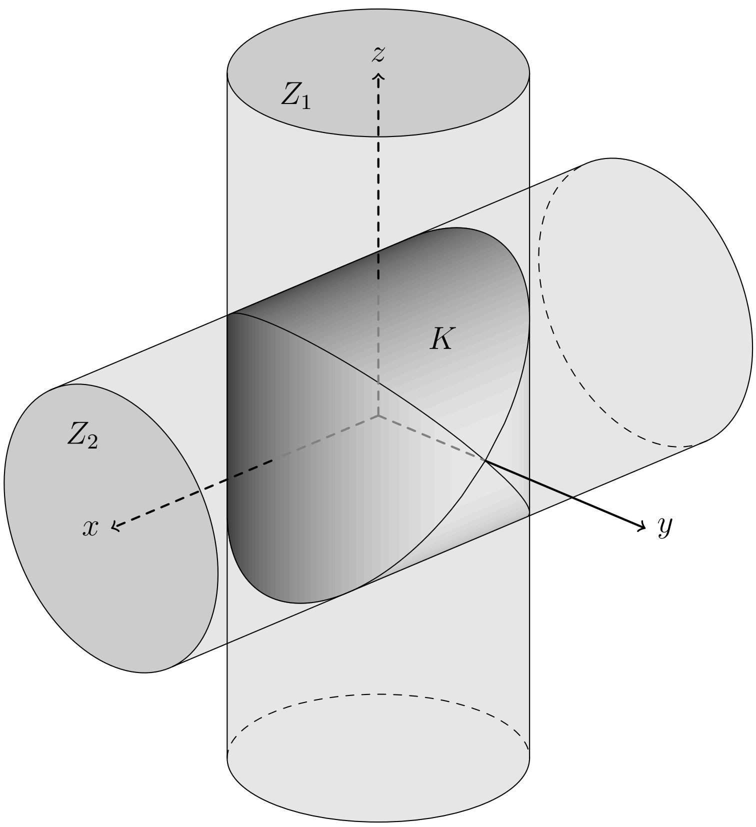
$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \int_\Omega 1\, d\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} 1 \cdot r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos\varphi)^2\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\left(2\pi + \frac{1}{2}\Big[\varphi + \sin\phi\cos\phi\Big]_0^{2\pi}\right) = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Dabei wird benutzt, dass die Determinante der Jacobi-Matrix der Polarkoordinaten $\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gleich $\det(d\Phi) = r$ ist.

13.2. Volumen

(a) Wir skizzieren $K = Z_1 \cap Z_2$, den Durchschnitt der beiden Vollzylinder

$$Z_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}, \qquad Z_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ y^2 + z^2 \leq 1\}.$$



(b) Für jedes $y \in [-1,1]$ sind die Bedingungen an x und z nur von y und nicht von der jeweils anderen Variablen abhängig. Konkret gilt $x^2 \leq 1-y^2$ und $z^2 \leq 1-y^2$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
K &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ (x^2 \leq 1-y^2) \wedge (z^2 \leq 1-y^2)\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ y \in [-1,1] \wedge -\sqrt{1-y^2} \leq x, z \leq \sqrt{1-y^2}\}.
\end{aligned}$$

Das Volumen von K beträgt somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(K) &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1\,dz\right)dx\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1\,dx\right)\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1\,dz\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(2\sqrt{1-y^2}\right)^2 dy = 4\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

(c) Falls die Dichte von K durch die Funktion $\rho(x,y,z) = 1 + x^2 + z^2$ gegeben ist, dann hat K die Masse

$$\begin{aligned}
m(K) &= \int_K \rho\,d\mu = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 + x^2 + z^2\,dz\right)dx\right)dy \\
&= \mathrm{Vol}(K) + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2\,dz\right)dx\right)dy \\
&\qquad + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z^2\,dz\right)dx\right)dy \\
&= \mathrm{Vol}(K) + \int_{-1}^{1}\left(2\sqrt{1-y^2}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2\,dx\right)dy \\
&\qquad + \int_{-1}^{1}\left(2\sqrt{1-y^2}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z^2\,dz\right)dy \\
&= \mathrm{Vol}(K) + \frac{8}{3}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^2\,dy = \frac{16}{3} + \frac{8}{3}\int_{-1}^{1}(1-2y^2+y^4)\,dy \\
&= \frac{8}{3}\left(2 + 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{368}{45}.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass bei der Berechnung der Integrale der Satz von Fubini auf die stetige Funktion ρ angewendet wird.

13.3. Linienintegral Sei γ der gegebene Streckenzug von $(-1,0)$ über $(-1,1)$ und $(1,1)$ nach $(1,0)$ und sei $\overline{\gamma}$ die direkte Strecke von $(-1,0)$ nach $(1,0)$. Zum Vektorfeld

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} v^1(x,y) \\ v^2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 4xy + 4y^2 \\ -2x^2 + 8xy + 12y^2 \end{pmatrix}$$

kann $\displaystyle\int_\gamma v \cdot d\vec{s}$ auf drei verschiedene Weisen berechnen werden.

(1) Via Satz von Green. Zunächst berechnen wir

$$\operatorname{rot}(v) = \frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial v^1}{\partial y} = -4x + 8y - (-4x + 8y) = 0.$$

Die Konkatenation von γ in umgekehrter Richtung und $\overline{\gamma}$ durchläuft den Rand eines Rechtecks Ω im Gegenuhrzeigersinn. Die Strecke $\overline{\gamma}$ können wir durch $\overline{\gamma}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\overline{\gamma}\colon t \mapsto (t,0)$ parametrisieren. Daher gilt gemäss des Satzes von Green

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} v \cdot d\vec{s} = \int_{\overline{\gamma}} v \cdot d\vec{s} - \int_\gamma v \cdot d\vec{s} = \int_\Omega \operatorname{rot}(v)\, d\mu = 0, \\ \Rightarrow &\int_\gamma v \cdot d\vec{s} = \int_{\overline{\gamma}} v \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_{-1}^1 3t^2 = 2. \end{aligned}$$

(2) Mit einem Potential. Weil $\operatorname{rot}(v) = 0$ ist und das Gebiet Ω einfach zusammenhängend ist, existiert zu v ein Potential f mit $v = \nabla f$. Die Bedingungen sind

$$\begin{aligned} f_x \overset{!}{=} 3x^2 - 4xy + 4y^2 \;&\Rightarrow\; f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 4xy^2 + g(y) \\ &\Rightarrow\; f_y = -2x^2 + 8xy + g'(y) \overset{!}{=} -2x^2 + 8xy + 12y^2, \end{aligned}$$

also folgt $g'(y) = 12y^2$, das heisst, $g(y) = 4y^3$ und $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 4xy^2 + 4y^3$. Da f ein Potential zu v ist, gilt $\displaystyle\int_\gamma v \cdot d\vec{s} = f(1,0) - f(-1,0) = 2$.

(3) Als Linienintegral. Wir parametrisieren die Stücke von γ via

$$\begin{aligned} &\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, & &\gamma_2\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2, & &\gamma_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \\ &\qquad t \mapsto (-1,t) & &\qquad t \mapsto (t,1) & &\qquad t \mapsto (1,t) \end{aligned}$$

wobei γ_3 in umgekehrter Richtung durchlaufen wird. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma v \cdot d\vec{s} &= \int_{\gamma_1} v \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} v \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_3} v \cdot d\vec{s} \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \dots \\ -2 - 8t + 12t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 3t^2 - 4t + 4 \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &\quad - \int_0^1 \begin{pmatrix} \dots \\ -2 + 8t + 12t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 -16t\, dt + \int_{-1}^1 3t^2 - 4t + 4\, dt = -8 + 10 = 2. \end{aligned}$$

13.4. Gauß Gegeben sind die Menge $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$ und das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} v^1(x,y,z) \\ v^2(x,y,z) \\ v^3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ x+y+z \\ z+z^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zunächst berechnen wir die Divergenz

$$\mathrm{div}(v) = \frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v^3}{\partial z} = 3 + 2z.$$

Gemäss des Satzes von Gauß beträgt der Fluss von v durch den Rand von Z

$$\int_Z \mathrm{div}(v)\, d\mu = \int_Z (3+2z)\, d\mu = \pi \int_{-1}^{1} (3+2z)\, dz = 6\pi,$$

wobei ausgenutzt wird, dass der Integrand nur von z und nicht von x, y abhängt, und die Schnitte $Z \cap \{(x,y,z)\,;\ x,y \in \mathbb{R},\ z = c\}$ für jedes feste $c \in [-1,1]$ Kreisscheiben vom Flächeninhalt π sind.

(b) Um den Anteil des Flusses durch die Zylindermantelfläche zu bestimmen, subtrahieren wir die Flüsse durch Deckel D und Boden B vom Gesamtfluss. Es gilt

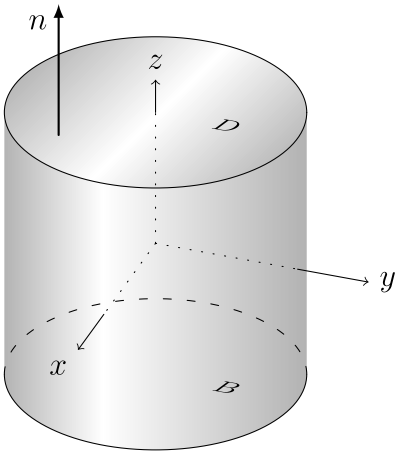
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2 \leq 1,\ z = 1\},$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2 \leq 1,\ z = -1\}.$$

$n = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist der äussere Einheitsnormalenvektor auf D. Der Fluss durch D beträgt

$$\int_D v \cdot n\, do = \int_D 2\, do = 2 \cdot do(D) = 2\pi.$$

Auf B ist $\tilde{n} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ der äussere Einheitsnormalenvektor. Wegen $z = -1$ gilt jedoch $v \cdot \tilde{n} = 0$ für alle x, y, das heisst der Fluss von v durch B ist Null.

Somit geht $\frac{(6\pi - 2\pi)}{6\pi} = \frac{2}{3}$ des Flusses durch die Mantelfläche.



13.5. Stokes Gegeben sind die Kurve $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ und das Vektorfeld

$$w(x,y,z) = \begin{pmatrix} w^1(x,y,z) \\ w^2(x,y,z) \\ w^3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ y-z+x \\ z-x+y \end{pmatrix}.$$

(a) Weil das Vektorfeld und die Kurven γ_i symmetrisch bezüglich zyklischer Vertauschung $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z \rightsquigarrow x$ sind, gilt

$$\int_\gamma w \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} w \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} w \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} w \cdot d\vec{s} = 3 \int_{\gamma_1} w \cdot d\vec{s}.$$

Wir parametrisieren $\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_1(t) = (1-t, t, 0)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_\gamma w \cdot d\vec{s} &= 3 \int_0^1 w\big(\gamma_1(t)\big) \cdot \dot{\gamma_1}(t)\, dt = 3 \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)-t \\ t+(1-t) \\ -(1-t)+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= 3 \int_0^1 -(1-2t) + 1 + 0 \, dt = 3. \end{aligned}$$

(b) Sei D das berandete, ebene Dreieck. Wir parametrisieren D als Graph über $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$, das heisst, durch $\Phi \colon \Omega \to D$ mit

$$\Phi(x,y) = \big(x, y, 1-x-y\big).$$

Es gilt

$$\Phi_x \times \Phi_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rot}(w) = \begin{pmatrix} \partial_y w^3 - \partial_z w^2 \\ \partial_z w^1 - \partial_x w^3 \\ \partial_x w^2 - \partial_2 w^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

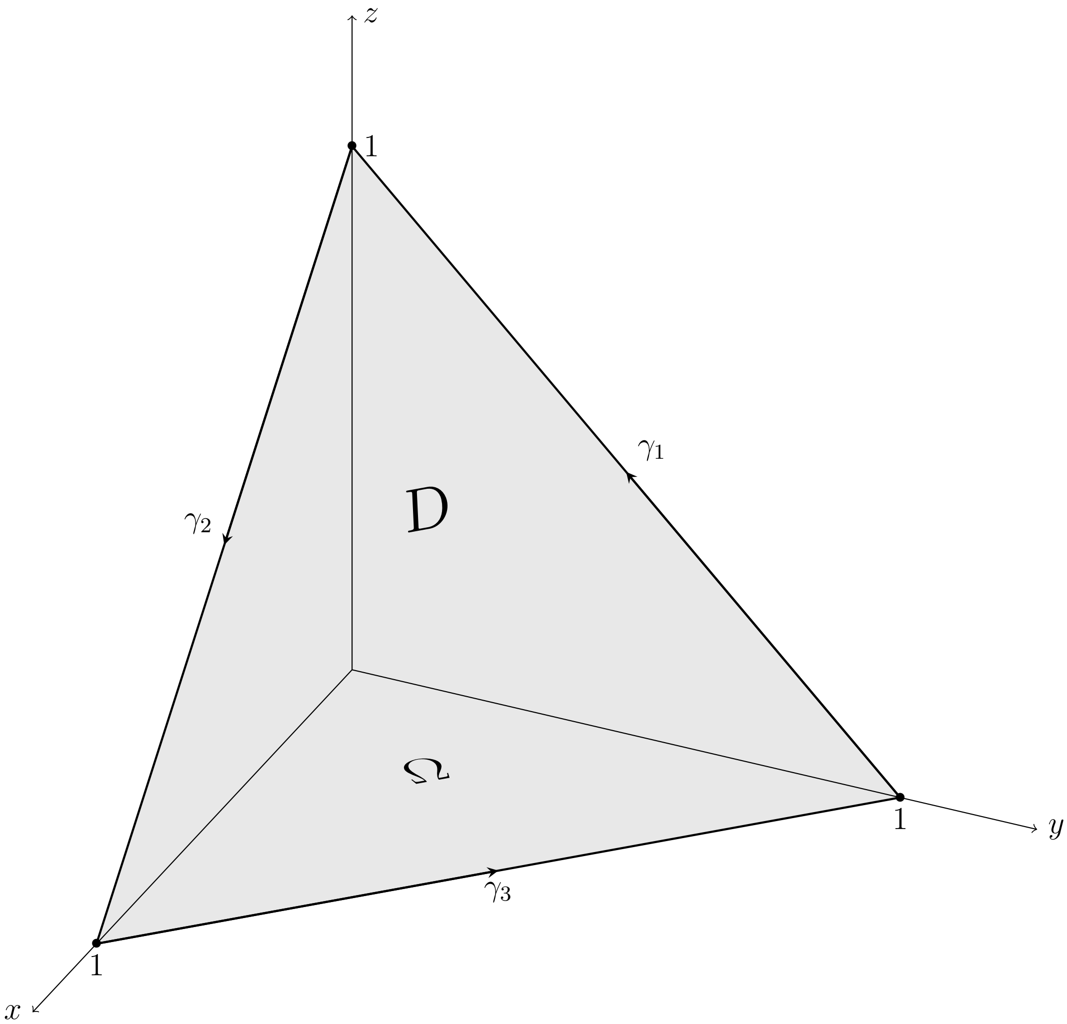
Sei $n \colon D \to \mathbb{R}^3$ der Einheitsnormalenvektor auf D. Es gilt $(n \circ \Phi)|\Phi_x \times \Phi_y| = \Phi_x \times \Phi_y$. Aus dem Satz von Stokes und mit Definition 8.6.3 folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} w \cdot d\vec{s} &= \int_D \operatorname{rot}(w) \cdot n \, do = \int_\Omega \Big((\operatorname{rot}(w) \cdot n) \circ \Phi \Big) |\Phi_x \times \Phi_y| \, d\mu(x,y) \\ &= \int_\Omega \Big(\operatorname{rot}(w) \circ \Phi \Big) \cdot (\Phi_x \times \Phi_y) \, d\mu(x,y) = \int_\Omega (2+2+2) \, d\mu(x,y) \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 6 \, dy \, dx = \int_0^1 6(1-x) \, dx = 3. \end{aligned}$$

(c) Da $\operatorname{rot}(w) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ konstant ist und $n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt, so folgt

$$\int_D \operatorname{rot}(w) \cdot n \, do = \int_D \frac{6}{\sqrt{3}} \, do = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \mu_2(D).$$

Als gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $\sqrt{2}$ hat D den Flächeninhalt $\mu_2(D) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.


z
1
γ_1
γ_2
D
Ω
1
y
γ_3
1
x