Aufgabe 1. [10 Punkte]

(a) Für $x > 0$ gilt

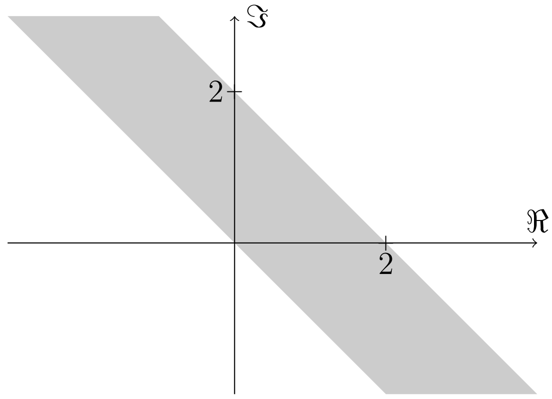
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^{(x^2+1)} = 2e^{(x^2+1)\log(x)}, \\ f'(x) &= 2e^{(x^2+1)\log(x)}\Big(2x\log(x) + x + \tfrac{1}{x}\Big) = 2x^{(x^2)}\Big(2x^2\log(x) + x^2 + 1\Big), \\ f(1) &= 2 \cdot 1^2 = 2 \;\Rightarrow\; f^{-1}(2) = 1, \\ (f^{-1})'(2) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(b) Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\operatorname{Im}(e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot z) = \operatorname{Im}\Big(\big(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4})\big)(x+iy)\Big) = y\cos(\tfrac{\pi}{4}) + x\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}.$$

Daraus folgt

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\; 0 < \operatorname{Im}(e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot z) < \sqrt{2}\} = \{(x+iy)\,;\; 0 < x + y < 2\}.$$



(c) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x}, & f(8) &= 2, \\ f'(x) &= \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, & f'(8) &= \tfrac{1}{12}, \\ T_1 f(x;8) &= f(8) + f'(8)(x-8) = 2 + \tfrac{1}{12}(x-8), & T_1 f(7;8) &= \tfrac{23}{12}. \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung von $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ um $x_0 = 8$ ergibt für $\sqrt[3]{7}$ die Näherung $\frac{23}{12}$. Der Fehler wird abgeschätzt durch

$$|r_1 f(7;8)| \le \sup_{\xi\in[7,8]} \Big|f''(\xi)\Big| \frac{(7-8)^2}{2} = \frac{1}{2} \sup_{\xi\in[7,8]} \Big|-\tfrac{2}{9}\xi^{-\frac{5}{3}}\Big| = \frac{7^{-\frac{5}{3}}}{9}.$$

Aufgabe 2. [8 Punkte]

(a) Seien $f(x) = 1 - \cos(x)$ und $g(x) = \sin(2x) - x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(x), & f'(0) &= 0, \\ g'(x) &= 2\cos(2x) - 1, & g'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Deswegen ist der Satz von Bernoulli-de l'Hôpital anwendbar und es folgt

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(2x)-x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \cos(n\pi)\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) = \cos(n\pi)\sqrt{n}\cdot\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \\ &= \frac{2(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Wir sehen $a_{2n} \to 1$ und $a_{2n+1} \to -1$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also nicht.

(c) Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, x^n, \qquad c_n = \frac{4^n}{n+4}$$

ist gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{n+4}}} = \frac{1}{4},$$

denn in der Vorlesung wurde $\sqrt[n]{n+4} \to 1$ für $n \to \infty$ gezeigt. Für $x = \frac{1}{4}$ divergiert

$$\sum_{n=1}^{N} c_n (\tfrac{1}{4})^n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+4}$$

als Teil der harmonischen Reihe. Für $x = -\frac{1}{4}$ konvergiert die Potenzreihe als Teil der alternierenden harmonischen Reihe. Somit ist das Intervall

$$\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$$

die Menge aller x, für die die Potenzreihe konvergiert.

Aufgabe 3. [11 Punkte]

(a) Die rechte Seite der Differentialgleichung $y'(x) = \big(1 + y(x)\big)x + 2\big(y(x) + 1\big)$ verschwindet, falls $y(x) = -1$, also ist $y(x) = -1$ eine Lösung. Im Fall $y(x) \neq -1$ gilt

$$\frac{y'(x)}{1 + y(x)} = x + 2,$$

$$\int \frac{1}{1+y}\,dy = \int \frac{y'(x)}{1+y(x)}\,dx = \int x + 2\,dx = \tfrac{1}{2}(x+2)^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für die Lösungen der Gleichung gilt somit

$$\begin{aligned} \log|y+1| &= \tfrac{1}{2}(x+2)^2 + c, && c \in \mathbb{R}, \\ |y+1| &= e^{\frac{1}{2}(x+2)^2} e^c, && c \in \mathbb{R}, \\ y + 1 &= Ce^{\frac{1}{2}(x+2)^2}, && C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Für $C = 0$ erhalten wir die konstante Lösung $y(x) = -1$. Die allgemeine Lösung ist somit gegeben durch

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{2}(x+2)^2} - 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Probe: $\quad y'(x) = Ce^{\frac{1}{2}(x+2)^2}(x+2) = \big(y(x) + 1\big)(x+2).$

(b) Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x-2}\right]_0^{2-\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty,$$

das heisst, das uneigentliche Integral konvergiert nicht.

(c) Mit $f(x, y) = y$ gilt

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_0^1 \int_y^{2-y} y\,dx\,dy = \int_0^1 (2-2y)y\,dy = \left[y^2 - \tfrac{2}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(d) Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} f_x \overset{!}{=} e^y \;\Rightarrow\; & f = xe^y + g(y,z) \\ \Rightarrow\; & f_y = xe^y + g_y(y,z) \overset{!}{=} z + xe^y \;\Rightarrow\; g(y,z) = zy + h(z) \\ & \qquad \Rightarrow\; f_z = y + h'(z) \overset{!}{=} y \;\Rightarrow\; h' = 0. \end{aligned}$$

$f(x,y,z) = xe^y + zy$ ist ein Potential zu v, denn

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^y \\ xe^y + z \\ y \end{pmatrix} = v(x,y,z).$$

Aufgabe 4. [10 Punkte]

(a) Die Differentialgleichung $y'''(t)+y''(t)-2y(t)=0$ hat charakteristisches Polynom

$$\chi(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2-2=(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+2)$$

mit komplexen Nullstellen $\lambda_1=1$ und

$$\lambda_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=-1\pm i$$

Die Lösung ist somit eine Linearkombination von $v_1(t)=e^t$ und $v_{2,3}(t)=e^{-t}e^{\pm it}$. Reellwertige Lösungen erhält man durch einen Basiswechsel $(v_1,v_2,v_3)\rightsquigarrow(\tilde{v}_1,\tilde{v}_2,\tilde{v}_3)$ mit

$$\tilde{v}_1=v_1,\qquad \tilde{v}_2=\frac{1}{2}(v_2+v_2)=e^{-t}\cos(t),\qquad \tilde{v}_3=\frac{1}{2i}(v_2-v_3)=e^{-t}\sin(t)$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}\cos(t)+c_3e^{-t}\sin(t),\quad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$$

Für $c_1=0$ erhalten wir die Lösungen

$$y(t)=c_2e^{-t}\cos(t)+c_3e^{-t}\sin(t),\quad c_2,c_3\in\mathbb{R}$$

mit $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$.

(b) Die Differentialgleichung $y''(t)+2y'(t)=-4$ kann zu $y'(t)+2y(t)=-4t+c_1$ mit $c_1\in\mathbb{R}$ integriert werden. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_{\mathrm{h}}(t)=c_2e^{-2t},\quad c_2\in\mathbb{R}$$

Eine partikuläre Lösung $y_{\mathrm{p}}(t)=-2t+\frac{1}{2}c_1-1$ erhält man über den Ansatz

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}(t)&=at+b,\\ y_{\mathrm{p}}'(t)+2y_{\mathrm{p}}(t)&=a+2at+2b\overset{!}{=}-4t+c_1\ \Rightarrow\ a=-2,\ b=\tfrac{1}{2}c_1-1. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$\begin{aligned} y(t)&=c_2e^{-2t}-2t+c,\quad c_2,c\in\mathbb{R}.\\ y'(t)&=-2c_2e^{-2t}-2. \end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $y'(0)=0$ folgt $c_2=-1$. Dann folgt $c=1$ aus der Anfangsbedingung $y(0)=0$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(t)=-e^{-2t}-2t+1.$$

Probe: Es gilt $y''(t)+2y'(t)=-4e^{-2t}+2(2e^{-2t}-2)=-4$.

Aufgabe 5. [6 Punkte]

Sei K der kompakte Teil des Zylinders $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, welcher zwischen der x-y-Ebene und der Ebene $E : x + y + z = 2$ liegt. Wir wechseln via $(x, y, z) = \Phi(r, \varphi, z) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z)$ mit $|\det d\Phi| = r$ zu zylindrischen Koordinaten und berechnen

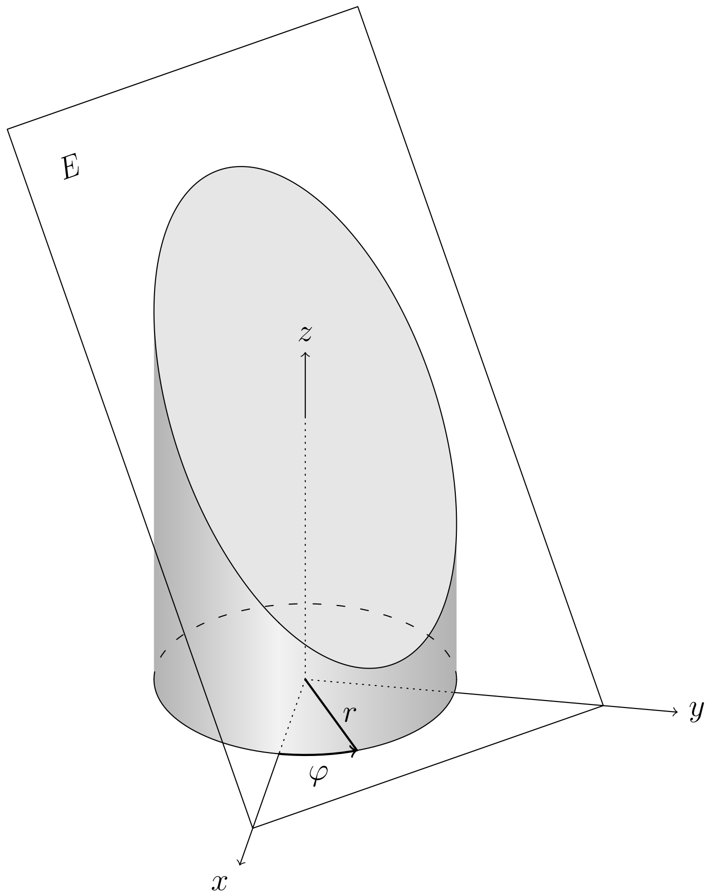
$$\begin{aligned}\int_K \rho\, d\mu &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi} 2z\, r\, dz\, d\varphi\, dr \\ &= \int_0^1 r \int_0^{2\pi} (2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)^2\, d\varphi\, dr\end{aligned}$$

Der Integrand ist

$$\begin{aligned}(2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 &= (2 - r\cos\varphi)^2 - 2(2 - r\cos\varphi) r \sin\varphi + r^2 \sin^2\varphi \\ &= 4 - 4r\cos\varphi + r^2 - 4r\sin\varphi + r^2 \sin(2\varphi).\end{aligned}$$

Integriert über $[0, 2\pi]$ haben die Sinus- und Cosinusterme keinen Beitrag. Es folgt

$$\int_K \rho\, d\mu = 2\pi \int_0^1 r(4 + r^2)\, dr = 2\pi(2 + \tfrac{1}{4}) = \frac{9\pi}{2}.$$



Aufgabe 6. [10 Punkte] Zunächst suchen wir kritische Punkte von

$$f(x,y) = x^2 + x + y^4 + \frac{2y^3}{3}$$

im Inneren von $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^4 \leq 2\}$. Es gilt

$$df(x,y) = (2x+1, 4y^3 + 2y^2) = (0,0) \ \Leftrightarrow\ x = -\tfrac{1}{2} \wedge (y = 0 \vee y = -\tfrac{1}{2}).$$

Wegen $(-\frac{1}{2})^2 + 0^4 \leq (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \leq 2$ liegen beide kritischen Punkte von f im Gebiet. Wir notieren die Kandidaten

$$p_1 = (-\tfrac{1}{2}, 0), \qquad p_2 = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}),$$
$$f(p_1) = -\frac{1}{4}, \qquad f(p_2) = -\frac{13}{48}.$$

Weitere Kandidaten sind nicht-reguläre Punkte von $g(x,y) = x^2 + y^4$ mit $g(x,y) = 2$. Die Jacobi-Matrix $dg(x,y) = (2x, 4y^3)$ hat höchstens Rang 1, das heisst, $(x,y) = (0,0)$ ist der einzige nicht-reguläre Punkt von g. Dieser erfüllt die Nebenbedingung nicht.

Die restlichen Kandidaten erfüllen die Lagrange-Bedingung $df(x,y) = \lambda\, dg(x,y)$, also

$$(1) \qquad 2x + 1 = 2\lambda x$$
$$(2) \qquad 4y^3 + 2y^2 = 4\lambda y^3$$
$$(3) \qquad g(x,y) = x^2 + y^4 = 2.$$

Aus (1) folgt $2x = \frac{1}{\lambda - 1}$. Aus (2) folgt $y = 0$ oder $2y = \frac{1}{1-\lambda} = 2x$. Aus (3) resultieren

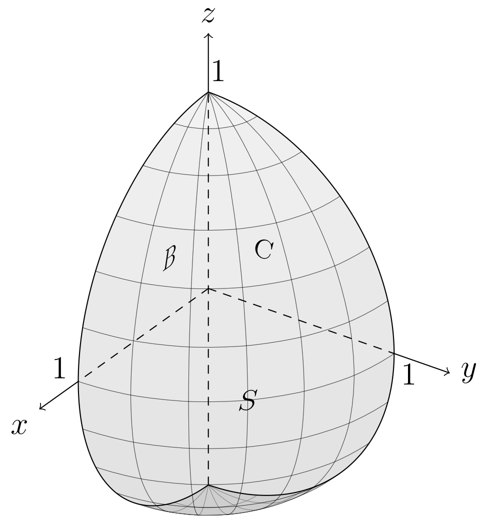
$$p_3 = (\sqrt{2}, 0), \qquad p_4 = (-\sqrt{2}, 0), \qquad p_5 = (1,1), \qquad p_6 = (-1,-1),$$
$$f(p_3) = 2 + \sqrt{2}, \qquad f(p_4) = 2 - \sqrt{2}, \qquad f(p_5) = \frac{11}{3}, \qquad f(p_6) = \frac{1}{3}.$$

Somit gilt

$$\min_{p \in \Omega} f(p) = f(p_2) = -\frac{13}{48}, \qquad \max_{p \in \Omega} f(p) = f(p_5) = \frac{11}{3}.$$

Aufgabe 7. [8 Punkte]

(a) Die Fläche $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ sieht so aus:



(b) Es gilt

$$\operatorname{div}(v) = \operatorname{div}\begin{pmatrix} 4 - x \\ -y - 2yz \\ 2y^2 + z^2 - z \end{pmatrix} = -1 - 1 - 2z + 2z - 1 = -3.$$

Die Flächenstücke B, C, S beranden eine Viertelkugel V. Seien

$$n_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n_S(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

die äusseren Einheitsnormalenvektoren auf den jeweiligen Teilflächen. Gemäss des Satzes von Gauß ist der Fluss von v durch S gegeben durch

$$\int_S v \cdot n_S \, do = \int_V \operatorname{div}(v)\, d\mu - \int_B v \cdot n_B \, do - \int_C v \cdot n_C \, do.$$

Es gilt

$$\int_V \operatorname{div}(v)\, d\mu = -3 \operatorname{Vol}(V) = -3 \cdot \frac{\operatorname{Vol}(\text{Kugel})}{4} = -3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi = -\pi,$$

$$\int_B v \cdot n_B \, do = \int_B y + 2yz \, do = 0,$$

$$\int_C v \cdot n_B \, do = \int_C -4 \, do = -4 \cdot \frac{\pi}{2} = -2\pi,$$

$$\Rightarrow \int_S v \cdot n_S \, do = -\pi + +2\pi = \pi.$$

Aufgabe 8. [6 Punkte]

Der Weg γ berandet ein ebenes Rechteck D mit Flächeninhalt $\sqrt{2}$. Der Einheitsnormalenvektor auf D ist gegeben durch

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$\operatorname{rot}(v) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} 2xz + 3y \\ -x^2 + y \\ -z + e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y \\ 2x \\ -2x - 3 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\int_\gamma v \cdot d\vec{s} = \int_D \operatorname{rot}(v) \cdot n \, do = \int_D \frac{-3}{\sqrt{2}} \, do = -3.$$