Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Michael Struwe

FS 2016

Analysis I & II
Probeprüfung
D-INFK

30. Mai 2016

- Prüfungsdauer: 180 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter), selbstverfasst von Hand oder getippt. Keine sonstige Literatur, keine Taschenrechner.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. In der Vorlesung gezeigte Aussagen dürfen ohne Beweis verwendet werden.
- Lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei.
- Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie ordentlich. Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.

Aufgabe 1. [10 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$\begin{aligned} f\colon\ ]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^{(x^2+1)} \end{aligned}$$

sowie den Wert

$$(f^{-1})'(2).$$

(b) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Zahlen.

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\ 0 < \operatorname{Im}(e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot z) < \sqrt{2}\}$$

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Taylorpolynoms erster Ordnung um $x_0 = 8$ eine Näherung an $\sqrt[3]{7}$. Schätzen Sie den Fehler dieser Näherung ab.

Aufgabe 2. [8 Punkte]

(a) Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(2x)-x}\right).$$

(b) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, wobei

$$a_n = \cos(n\pi)\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right).$$

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, sodass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n+4}$$

konvergiert.

Aufgabe 3. [11 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = \Big(1 + y(x)\Big)x + 2\Big(y(x) + 1\Big).$$

(b) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

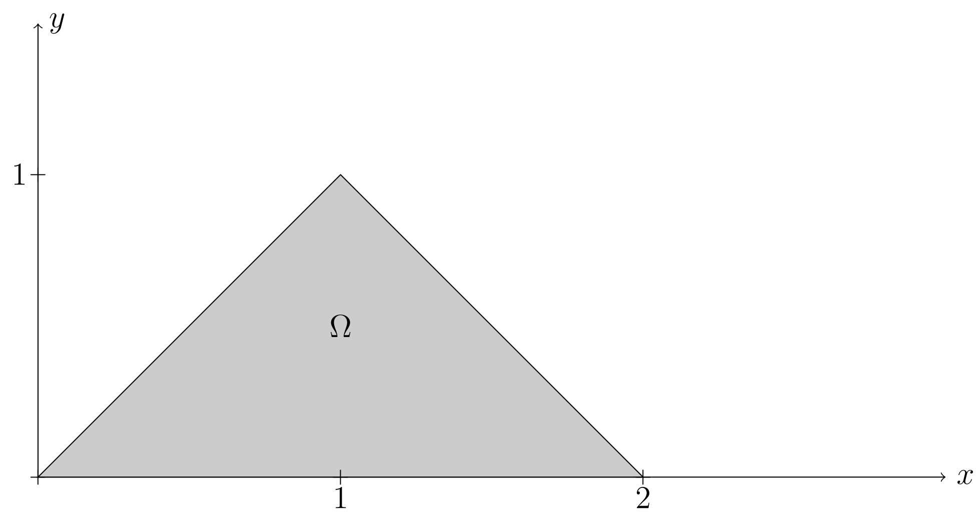
$$\int_0^\infty \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

konvergiert. Falls ja, berechnen Sie den Wert dieses Integrals.

(c) Integrieren Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto y \end{aligned}$$

über folgenden Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.



(d) Besitzt folgendes Vektorfeld ein Potential? Beweisen Sie Ihre Aussage.

$$\begin{aligned} v\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto \begin{pmatrix} e^y \\ z + xe^y \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 4. [10 Punkte]

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'''(t) + y''(t) - 2y(t) = 0$$

mit

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = -4, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 5. [6 Punkte] Der Zylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 \leq 1\},$$

habe Dichte $\rho(x, y, z) = 2|z|$. Berechnen Sie die Masse des nicht-leeren, kompakten Teils von Z, welcher zwischen der x-y-Ebene und der Ebene $E : x + y + z = 2$ liegt.

Aufgabe 6. [10 Punkte] Finden Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + x + y^4 + \frac{2y^3}{3}$$

im Bereich

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^4 \leq 2\}.$$

Aufgabe 7. [8 Punkte] Gegeben seien

$$\begin{aligned} v\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto \begin{pmatrix} 4-x \\ -y-2yz \\ 2y^2+z^2-z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; x^2+y^2+z^2=1,\; x \geq 0,\; y \geq 0\}.$$

(a) Zeichnen Sie die Fläche S.

(b) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds v durch die Fläche S nach aussen, das heisst, weg vom Ursprung.

Aufgabe 8. [6 Punkte] Berechnen Sie

$$\int_\gamma v \cdot d\vec{s}$$

entlang des eingezeichneten Wegs γ für das Vektorfeld

$$\begin{aligned} v\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto \begin{pmatrix} 2xz+3y \\ -x^2+y \\ -z+e^y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$