1.1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ♡ Berechnen Sie jeweils die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

(a) $f(x) = \int_x^1 \sin^2(t)\, dt,$ **(b)** $f(x) = \int_0^{x^3} \cos^3(t)\, dt.$

Berechnen Sie ausserdem den Wert $(f^{-1})'(0)$ für

(c) $f(x) = \int_\pi^x \cos(\cos t)\, dt.$

1.2. Separierbare Differentialgleichungen ◇ Finden Sie die Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen durch Separation der Variablen. Sind alle Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

(a) $y' = y^2 - 1,$ **(b)** $y' = e^{x+y},$

(c) $y' = \dfrac{e^{x+y} - e^{x-y}}{\cosh(y)},$ **(d)** $y' = \cos(2x)\, y \log(y).$

Hinweis. Bevor Sie durch einen Term teilen, unterscheiden Sie den Fall, dass der Term den Wert Null annimmt.

Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem durch Separation der Variablen.

(e) $\begin{cases} y' - y = y\log(x) + 1 + \log(x), \\ y(2) = 3. \end{cases}$

1.3. Substitution und Partialbrüche (schriftlich) △ Berechnen Sie folgende Integrale durch geeignete Substitution.

(a) $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})\, dt,$ **(b)** $\int_0^{\log(3)} e^{3t-e^t}\, dt.$

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen.

(c) $\int \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\, dx,$ **(d)** $\int \dfrac{4x+8}{x^4-16}\, dx.$

Hinweis. Der Nenner des letzten Integranden zerfällt *nicht* in (reelle) Linearfaktoren. Die Partialbruchzerlegung funktioniert dann wie in Beispiel 6.1.7.