2.1. Gleichmässige Stetigkeit ♡ Sind die folgenden stetigen Funktionen gleichmässig stetig? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

$$f\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R} \qquad g\colon \mathbb{R} \to\ ]0,\infty[\qquad h\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^{-1} \qquad\qquad x \mapsto e^x \qquad\qquad x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$

2.2. Riemannsummen (schriftlich) △ Sei $f \in C^1([0,1])$ beliebig. Angenommen, es gilt $|f'(x)| \leq 5$ für alle $x \in [0,1]$. Wie fein muss eine äquidistante Zerlegung

$$\bigcup_{k=1}^{n} I_k = [0,1]$$

des Intervalls $[0,1]$ in disjunkte Teilintervalle I_k gewählt werden, sodass für eine beliebige Auswahl von Stützstellen $x_k \in I_k$, $k = 1, \dots, n$ gilt

$$\left| \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)|I_k| \right) - \int_0^1 f(x)\,dx \right| < \frac{1}{100}.$$

In anderen Worten: Wie viele gleich breite Treppenstufen sind nötig, damit sich das Integral der Approximation von f mit der Treppenfunktion aus Satz 6.2.3 vom Integral von f um höchstens 0.01 unterscheidet? Bestimmen Sie die Anzahl n.

2.3. Variation der Konstanten △ Bestimmen Sie die durch den Punkt $(0,1)$ gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x)\,\tan(x) + 4\sin(x).$$

Hinweis. Eine partikuläre Lösung zu einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung findet man durch „Variation der Konstanten" [Skript, S. 123 f.]:

Gegeben sei eine Differentialgleichung $f' - af = b$, wobei a und b stetige Funktionen sind. Angenommen, wir haben die allgemeine Lösung $c\,f_{\mathrm{h}}(x)$, $c \in \mathbb{R}$ der homogenen Gleichung $f_{\mathrm{h}}' - af_{\mathrm{h}} = 0$ bereits bestimmt. Dann erhalten wir eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz $f_{\mathrm{p}}(x) = c(x)\,f_{\mathrm{h}}(x)$. (Die „Konstante" der homogenen Lösung darf jetzt auch von x abhängen.) Setzen wir in die Gleichung ein, so folgt

$$b + af_{\mathrm{p}} \overset{!}{=} f_{\mathrm{p}}' = c'f_{\mathrm{h}} + cf_{\mathrm{h}}' = c'f_{\mathrm{h}} + caf_{\mathrm{h}} = c'f_{\mathrm{h}} + af_{\mathrm{p}}$$

Beidseitige Subtraktion von af_{p} ergibt $b = c'f_{\mathrm{h}}$. Eine Stammfunktion von $c' = \frac{b}{f_{\mathrm{h}}}$ ist der gesuchte Faktor $c(x)$ der partikulären Lösung.