

3.1. Differentialgleichung (schriftlich) \diamond Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}.$$

- (a) Ist die Differentialgleichung linear? Sind die Variablen separierbar?
(b) Bestimmen Sie die Funktion $x \mapsto y(x) > 0$, die für $x > 0$ die Differentialgleichung löst und die Bedingung $y'(\frac{2}{3}) = 0$ erfüllt. *Hinweis.* Man substituiere $u(x) = \frac{1}{x}y(x)$.
(c) Wie verhalten sich $y(x)$ und $y'(x)$, wenn x gegen die untere oder die obere Grenze des maximalen Definitionsintervalls von $y(x)$ strebt? Skizzieren Sie den Graphen.

3.2. Reihenabschätzung \heartsuit Zeige Sie, dass die Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n) \log(\log n)}$$

divergieren, die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

aber konvergiert. *Hinweis.* Schätzen Sie die Reihen nach unten beziehungsweise oben durch ein geeignetes uneigentliches Integral ab.

3.3. Uneigentliche Integrale \heartsuit Bestimmen Sie, ob folgende uneigentliche Integrale konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx & \text{(b)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx \\ \text{(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx & \text{(d)} \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2-2x+1} dx \end{array}$$

3.4. Uneigentliche Integrale \triangle Konvergieren folgende uneigentliche Integrale?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx & \text{(b)} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) dx \\ \text{(c)} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x} dx & \text{(d)} \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^s} dx, \quad s > 0 \end{array}$$

Hinweis. Der Grenzwert muss nicht berechnet werden. Erhöhen Sie bei (d) die Potenz in x^s durch partielle Integration.