4.1. Gammafunktion △ Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

(a) Beweisen Sie folgende Eigenschaften.

(i) $\Gamma\colon\ ]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, das heisst, $\Gamma(x)$ existiert für alle $x > 0$.

(ii) $\forall x > 0: \quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \Gamma(n+1) = n!$

(b) Berechnen Sie den Wert $\Gamma(\frac{1}{2})$. *Hinweis:* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.

4.2. Richtungsfelder ♡ Zeichnen Sie die Richtungsfelder und einige Lösungskurven zu folgenden Differentialgleichungen. Ist der Satz von Picard–Lindelöf anwendbar? Existieren die Lösungen für alle Zeiten?

(a) $u'(t) = u(t) - t,$

(b) $u'(t) = \dfrac{u(t)}{t},$ $(t \neq 0)$

(c) $u'(t) = -\dfrac{t}{u(t)},$ $(u(t) \neq 0)$

4.3. Freier Fall (schriftlich) △ Die Geschwindigkeit beim senkrechten freien Fall mit Luftwiderstand wird durch die Differentialgleichung $v'(t) = g - c\,v(t)^2$ mit $v(0) = 0$ und physikalischen Konstanten $g, c > 0$ beschrieben.

(a) Zeigen Sie, dass der Satz von Picard–Lindelöf hier anwendbar ist.

(b) Seien $g = 1 = c$. Berechnen Sie die ersten drei „Picard–Lindelöf-Iterationen“

$$\varphi_1(t) = \Big(\Phi_0(0)\Big)(t), \qquad \varphi_2(t) = \Big(\Phi_0(\varphi_1)\Big)(t), \qquad \varphi_3(t) = \Big(\Phi_0(\varphi_2)\Big)(t).$$

(c) Zeichnen Sie das Richtungsfeld und bestimmen Sie die Lösung $v(t)$ explizit.

4.4. Fixpunkte ◇

(a) Zeigen Sie, dass folgende Abbildung genau einen Fixpunkt hat.

$$\begin{aligned} f\colon\ [0,\infty[\ &\to [0,\infty[\\ x &\mapsto \sqrt{1+\sin(x)+x} \end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie, dass folgende Gleichung genau eine Lösung $x \in\ ]0,1[$ besitzt.

$$x = \tfrac{1}{10}\, e^{-x^2 \sin\frac{1}{x}}$$

Hinweis. Der Mittelwertsatz hilft beim Nachweis der Kontraktionseigenschaft.