5.1. Erste partielle Ableitungen ♡ Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Funktionen und berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen.

(a) $f(x,y) = \pi x^2$

(b) $f(x,y) = e^{xy}$

(c) $f(x,y) = x^y$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

(e) $f(x,y) = x^2 y \sin(xy)$

(f) $f(x,y,z) = xy^2z^3 + y$

5.2. Zweite partielle Ableitungen (schriftlich) ◇ Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils die „gemischten" zweiten partiellen Ableitungen

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse.

(a) $f(x,y) = x^2 e^{y \sin x}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Hinweis. Berechnen Sie bei (b) an der Stelle $(0,0)$ die Differenzenquotienten.

5.3. Richtungsableitung △ Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}$$

heisst, falls existent, *Richtungsableitung* von f in Richtung v an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ und wird mit $D_v f(x)$ bezeichnet. In Richtung $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ gilt insbesondere $D_{e_i} f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Man untersuche, ob die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an den angegebenen Stellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in die gegebenen Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ und $w \in \mathbb{R}^2$ eine Richtungsableitung haben und berechne gegebenenfalls deren Wert. *Hinweis.* Nicht ausmultiplizieren.

(a) $f(x,y) = \cos(xy) + x^2$, $(x,y) = (\pi, 3)$, $v = (1,1)$, $w = (2,0)$,

(b) $f(x,y) = 2x^2y + 3xy + y$, $(x,y) = (2,1)$, $v = (1,1)$, $w = (1,2)$.

Berechnen Sie zusätzlich die partiellen Ableitungen an den entsprechenden Stellen. Was fällt auf?

5.4. Velo im Schnee △ Du fährst mit deinem Velo durch den verschneiten $\mathbb{R}^2$. Im Zeitintervall $[0,T]$ hinterlassen Vorderrad α und Hinterrad β jeweils eine Spur im Schnee:

$$\alpha\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix} \qquad \beta\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{pmatrix}$$

Gesucht ist ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Kurven. Sei $L = |\alpha(t) - \beta(t)|$ der Abstand der beiden Räder.

(a) Begründen Sie, dass es eine (reellwertige) Funktion $f\colon [0,T] \to [0,\infty[$ gibt, sodass

$$\dot{\beta}(t) = f(t)\, v(t), \qquad v(t) := \frac{1}{L}\Big(\alpha(t) - \beta(t)\Big) \in \mathbb{R}^2$$

Welche verkehrstechnische Bedeutung haben die Zahl $f(t)$ und der Vektor $v(t)$?

(b) Begründen Sie $\frac{d}{dt}|\alpha(t) - \beta(t)|^2 = 0$ und bestimmen Sie f in Abhängigkeit von $\alpha, \dot{\alpha}$ und β. *Hinweis.* Finden Sie eine Differentialgleichung für β.

(c) Angenommen, ein Velo hinterlässt folgende Spuren im Schnee des positiven Quadranten. Aus welcher Richtung kam das Velo? Beweisen Sie ihre Behauptung unter der Annahme, dass sich das Vorderrad vor und nach dem Fahren auf einer der Koordinatenachsen befindet und damit eine Komponente von α Null ist.