6.1. Differential ♡ Sei $f(x,y) = |xy|$. Finden Sie Menge aller Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in welchen f differenzierbar ist und berechnen Sie dort das Differential von f.

6.2. Unstetige Ableitungen △ Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(b) Ist f von der Klasse C^1?

6.3. Kettenregel △

(a) Sei $x(t) = \cos(\pi t)$. Sei $y(t)$ die Stammfunktion von $t \mapsto e^{-t^2}$, die an der Stelle $t = 1$ den Wert $y(1) = 42$ annimmt. Weiterhin sei $f(x,y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $t \mapsto f(x(t), y(t))$ im Punkt $t = 1$.

(b) Berechnen Sie das Differential $df(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0)$ zur Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \int_{\cos x + \sin y}^{z} e^{tz}\,dt.$$

6.4. Tangentialebene (schriftlich) ◇ Sei $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ der Graph von

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto e^{-(x^2+y^2-2x+3y+2)}. \end{aligned}$$

(a) Die Schnittmengen von $\mathcal{G}$ mit den Ebenen $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0\}$ und $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$ sind Kurven. Geben Sie Parametrisierungen $\gamma_1, \gamma_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dieser beiden Kurven an.

(b) Finden Sie die Tangentialvektoren $\dot{\gamma}_1$ und $\dot{\gamma}_2$ am Schnittpunkt der beiden Kurven.

(c) Die Tangentialvektoren aus (b) spannen eine Ebene E auf, die den Graphen $\mathcal{G}$ berührt und deshalb *Tangentialebene* genannt wird. Finden Sie eine *Parametrisierung*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to E \subset \mathbb{R}^3 \\ (s,t) &\mapsto \big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \end{aligned}$$

und eine *Koordinatengleichung*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \text{„Gleichung mit } x, y, z\text{“}\}$$

dieser Ebene. Vergleichen Sie letztere mit der durch das Differential gegebene Formel für die lineare Approximation von f in einer Umgebung von $(0,0)$.

(d) Finden Sie alle Punkte in $\mathcal{G}$, wo die Tangentialebene parallel zur x-y-Ebene ist.